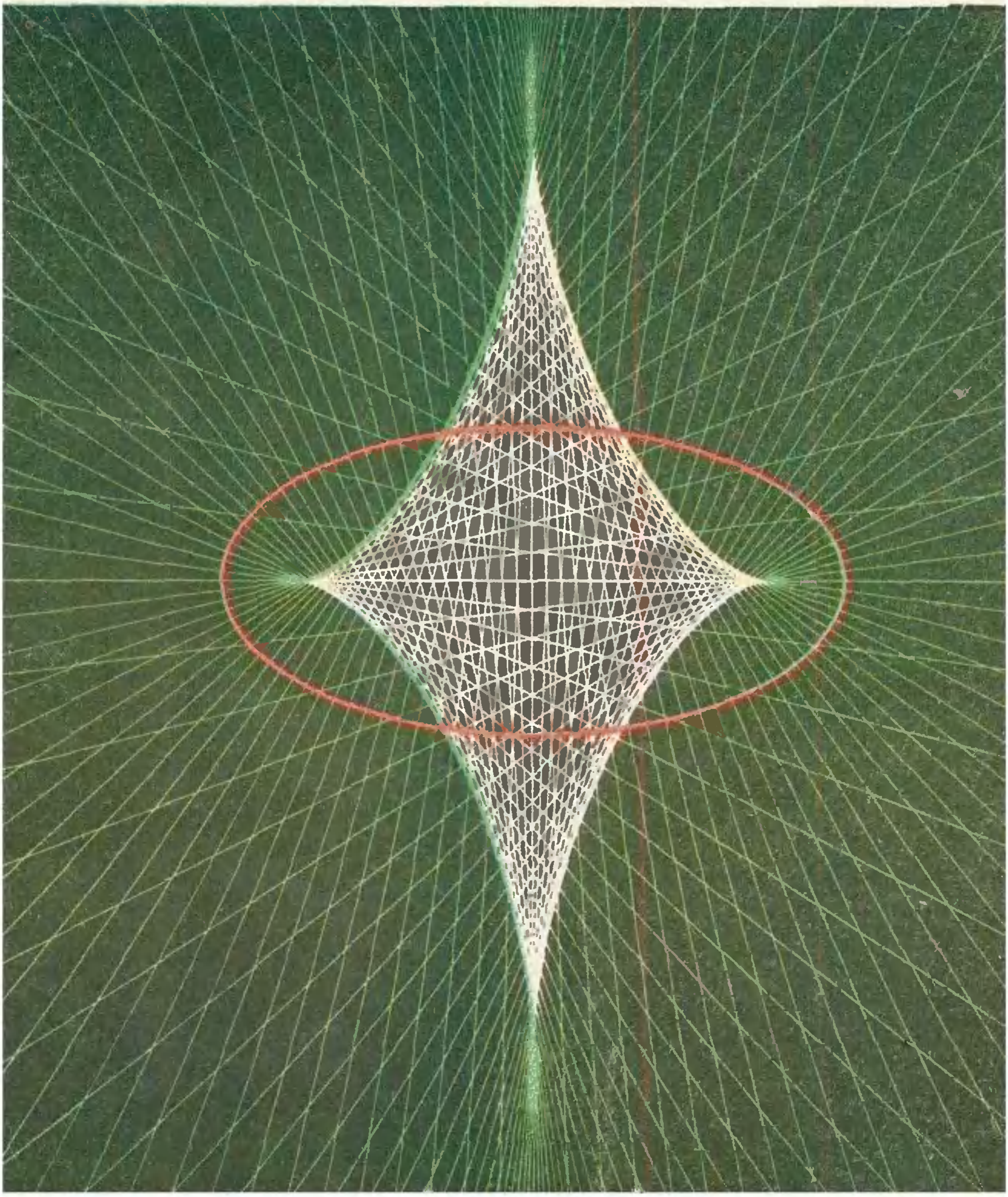
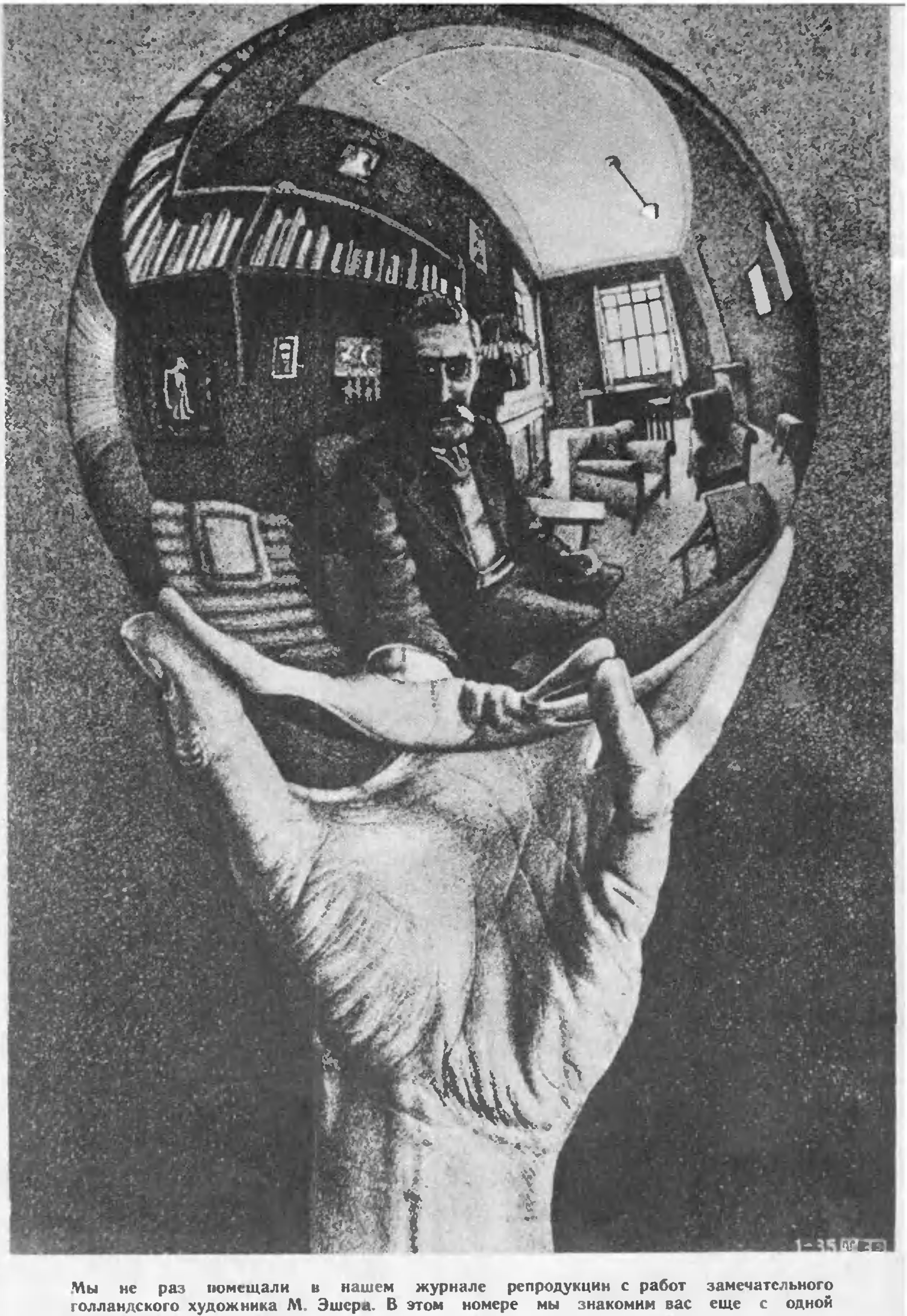
КВАНТ

8
1981

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР





Мы не раз помещали в нашем журнале репродукции с работ замечательного голландского художника М. Эшера. В этом номере мы знакомим вас еще с одной его работой.

Как вы думаете, рисовал ли художник «с натуры» или это — плод его воображения?

Квант

8
1981

Основан в 1970 году

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

В НОМЕРЕ:

Кривую
на первой странице
обложки
нарисовал
«электронный художник»
по программе Ю. Котова;
подробнее см. с. 29.

Г. Марчук

Слово к научной молодежи

Я хотел бы высказать несколько мыслей, адресованных непосредственно молодежи, идущей в науку.

У молодежи есть колоссальные преимущества, которые она не всегда осознает, а потому не умеет использовать. Ведь молодость — огромное богатство, которое дается каждому человеку, но, к сожалению, только на время. Не растерять его, истратить его с пользой — главное условие для того, чтобы последующая жизнь была продуктивной, осмысленной и радостной.

Молодые годы — это наиболее творческие годы в жизни человека. Именно то, что он успевает сделать в молодости, остается в нем навсегда, составляет фундамент, которым он потом пользуется всю жизнь. Растраченное в молодости время уже невозвратимо. Потратить его исключительно на развлечения, или на чисто формальное учение, или бездумное исполнение служебных обязанностей — значит обокрасть самого себя, погубить в себе еще не развившиеся способности. Поэтому к юным годам надо относиться с особым вниманием, с особой требовательностью.

Некоторые молодые люди наивно полагают, что молодость — это пора, когда нужно брать от жизни все. А что такое «все», толком не знают. А брать от жизни все — значит впитать в себя огромную массу знаний, навыков и умений, совершенствовать и углублять их в продолжение всей творческой сознательной жизни. И, конечно, возвратить это обществу сторицей. Жизненный опыт подсказывает, что чем раньше обретешь свою цель, свое место в жизни, тем плодотворней и содержательней будет вся дальнейшая деятельность. Этому нас учит пример великих русских и советских ученых: Николая Ивановича Лобачевского, Дмитрия

Академик Гурий Иванович Марчук — Герой Социалистического Труда, лауреат Ленинской и Государственной премий, заместитель Председателя Совета Министров СССР, председатель Государственного комитета СССР по науке и технике.

Статья перепечатывается с небольшими сокращениями из книги «Молодым о науке», выпущенной в 1980 году издательством «Молодая гвардия».

Ивановича Менделеева, Ивана Петровича Павлова, Пафнутия Львовича Чебышева, Игоря Васильевича Курчатова, Сергея Павловича Королева, Мстислава Всеволодовича Келдыша и многих других.

Молодости свойственно замахиваться на большие дела, решительные перемены, осмысливать глобальные крупные проблемы. Это прекрасно, но любой самый прекрасный замысел останется игрушкой, мыльным пузырем, если он не будет осуществлен. Поэтому надо стараться не только замышлять, придумывать, предлагать, но всегда делать, делать конкретное дело и уметь доводить его до конца. Ведь именно сумма, интеграл всех конкретных дел и создает, в сущности, все наше общественное богатство, весь потенциал в любой области человеческой деятельности.

Молодые люди, которые увлекаются спортом, хорошо знают, что для достижения результата, для сохранения спортивной формы нужен большой труд. Еще в большей степени это относится к творческим способностям. Только если тренировать свой интеллект, нагружать его задачами, поисками решений, только тогда он не ослабеет и будет развиваться и крепнуть.

Не нужно думать, что это относится только к молодежи, которая занимается научными исследованиями. Надо пытаться вырабатывать творческий подход к жизни в любой сфере деятельности. Только такой подход даст возможность глубоко проникать в суть вещей, явлений, процессов и в производстве, и в экономике, и в общественной жизни. Прежде всего нужно проникать в глубину, в самую суть, широта придет уже потом как следствие. Бойтесь поверхностного подхода к познанию — это закроет вам путь к творчеству.

Самое главное в профессии ученого — уметь вскрыть несоответствие накопленных обществом знаний, представлений с обнаружившимися вдруг явлениями или фактами, которые могут показаться, на первый взгляд, ошибками в эксперименте или в ходе рассуждений. Тщательное исследование возникшего противоречия и поиск способа его разрешения, как правило, позволяют не только более глубоко посмотреть на вещи, но и зачастую открыть новые пути в науке.

Мне вспоминается случай, происшедший в одном из волжских городов. Меня пригласили в университет прочитать доклад по проблемам математики, я с удовольствием согласился. После доклада подходит ко мне один из слушателей, назвавшийся доцентом университета, и говорит:

— Хорошо вам в Академгородке, у вас там сколько хочешь проблем, а где их взять у нас?

Я был не только поражен, но и прямо-таки шокирован таким вопросом.

— Позвольте, уважаемый коллега, беритесь за любую тему, работайте и, как только упретесь во что-то непонятное, — вот вам и проблема... Беритесь за нее и решайте.

Специалист двухтысячного года представляется мне широко образованным не в одной области науки, а по крайней мере в двух-трех: законы развития научно-технической революции обязательно предъявят такой «счет».

Употребляя термин «широкий», имею в виду, конечно, основательность, серьезность знаний. И четко вижу путь формирования такого специалиста. После окончания вуза (возьмем для примера университет) главная задача его выпускника — войти серьезно в ту сферу первой самостоятельной работы, которая будет ему поручена. Вероятнее всего, в узкую научную проблему. Исследуя ее, молодой специалист фактически глубоко разрабатывает собственные творческие умения, навыки. На это уходит три — пять лет. За этот срок молодой специалист становится — не может не стать — «профессором» в своей «узкой области».

После этого ему необходимо переключиться в смежную область науки, может быть даже далекую от той узкой проблемы, в которой он специализировался. Войти в новую сферу знаний — то есть овладеть

1*

новыми фактами, фундаментальными идеями. Однако на это понадобится уже меньше времени — один—три года, потому что методы, процесс познания оказываются теми же самыми: отработанная сразу после университета система творчества «сработает» и здесь. Именно это и даст возможность быстро войти в новую область науки. На овладение третьей понадобится еще меньше времени, но глубина научного поиска теперь уже остается той же.

Теперь специалист оказывается способным обозревать более широкую сферу науки или техники. Он начинает распознавать тенденции дальнейшего развития науки на стыках смежных областей. А открытия на стыках, как правило, более важны. Так в конце концов и рождается крупный ученый, руководитель, способный обозревать и глубоко разрабатывать основные направления научно-технического прогресса.

Случается, что стремительный рост и первые успехи вызывают у молодых людей чувство превосходства над своими товарищами. В связи с этим я хотел бы обратить особое внимание молодежи на такое понятие, как скромность.

Это вроде бы прописная истина, что надо быть скромным, тут вроде и говорить не о чем. Но это качество, на мой взгляд, становится все более важным в нашу эпоху, когда неуклонно возрастают удельный вес и роль коллективных форм труда и других видов общественной человеческой деятельности. Скромность проявляется именно в общении человека с другими людьми, именно она (или ее отсутствие) определяет часто атмосферу в коллективе, нравственный климат. Скромность — неотъемлемая черта высокой культуры.

Мне очень по душе высказывание на эту тему Гегеля. Правда, оно облечено в несколько тяжеловесную и трудноватую для мгновенного восприятия форму, но зато очень глубоко по содержанию. Вот оно:

«Под словами «культурные люди» можно ближайшим образом понимать таких людей, которые в состоянии сделать все то, что делают другие, и которые не выставляют напоказ своей частности, между тем как у некультурных людей обнаруживается именно последняя.

В своих отношениях с другими людьми некультурный человек может легко их обидеть, так как он дает волю лишь себе и не предается размышлениям о чувствах, которые испытывают другие. Он не хочет оскорблять других, но его поведение не согласуется с его волею. Культурность, следовательно, есть сглаживание особенности, чтобы она вела себя согласно природе предмета. Истинная оригинальность, являющаяся творчеством настоящего предмета, требует культурности, между тем как ложная оригинальность принимает форму тех безвкусных проявлений, которые приходят в голову лишь некультурным людям».

Я выписал это высказывание и держу его под рукой, а при случае показываю своим молодым сотрудникам, чтоб взяли себе на заметку.

Только не следует путать скромность с боязливостью, инертностью — это далеко не одно и то же. Смелость, даже дерзость научных постановок, новых решений — это то, что радует любого учителя в своем ученике.

Талантливая молодежь, как правило, проявляет интерес к новым областям науки и техники, она, часто сама того не сознавая, выражает актуальные потребности общества. Молодые люди, не отягощенные грузом традиций, легче входят в совершенно новые проблемы, работают на стыках наук, в том числе таких, которые ранее казались несоединимыми.

В наше время приходится постоянно обновлять свои знания и вполне сложившимся, зрелым специалистам, иначе они рискуют отстать от жизни. Поэтому призыв Владимира Ильича Ленина, обращенный к молодежи: «Учиться, учиться и еще раз учиться» — не только не стареет, а, наоборот, с каждым годом становится все актуальнее.

Будем же следовать ему.

С. Пикин

Жидкие кристаллы

Удивительный мир жидких кристаллов открылся глазам ученых сравнительно давно, но за последние 15—20 лет произошел огромный скачок в понимании природы жидкокристаллического состояния, физических свойств этих веществ, их роли в современной науке и технике. И сейчас уже нет сомнений в том, что без этих материалов, разнообразных по своим свойствам, высокоэкономичных, сравнительно простых в изготовлении и применении, дальнейший научно-технический прогресс не может обойтись.

А самые первые сведения о таких веществах были сообщены в 1888 году австрийским ботаником Ф. Рейницером, который синтезировал необычные кристаллы. При их нагревании получалась жидкость, которая в зависимости от температуры была то мутной, то прозрачной, то приобретала синеватый цвет. Немецкий физик О. Леман начал систематическое изучение таких веществ и установил, что открыто особое состояние, присущее многим органическим соединениям.

Нематическая жидкость

Жидкости сильно отличаются от газов и твердых кристаллов. Атомы или молекулы, из которых состоит жидкость, не могут разойтись на сколь угодно большое расстояние друг от друга. Это означает, что в жидкости очень важны силы притяжения между атомами или молекулами. То же самое можно сказать и о твердом кристалле, но в кристалле эти силы настолько велики, что атомы вынуждены занимать в нем строго определенные места, образуя трехмерную кристаллическую решетку. В такой решетке всегда имеются выделенные направления, называемые осями кристалла. Вдоль этих направлений атомы располагаются в строго периодическом порядке. В обычной жидкости нет никаких выделенных направлений, она не обладает собственной формой, потому что молекулы жидкости не столь прочно связаны друг с другом и могут перемещаться в пространстве — перескакивать с места на место.

Таким образом, в текучей жидкости молекулы только в среднем находятся на некотором характерном расстоянии друг от друга. Ответ на вопрос, как взаимодействуют между собой молекулы и чему равно среднее расстояние a между ними, дает квантовая механика. Оказывается, что на больших расстояниях между молекулами их взаимодействие определяется силами притяжения, а на очень малых расстояниях — силами отталкивания. Следовательно, молекулы не могут сблизиться на сколь угодно малое расстояние из-за очень больших сил отталкивания — в этом случае говорят, что молекулы не могут проникать друг в друга. На расстоянии a, примерно равном размеру молекул, сила взаимодействия между молекулами становится равной нулю.

Так устроена обычная жидкость, состоящая из относительно простых молекул или атомов. Однако нас поджидает замечательное открытие, если молекулы имеют ярко выраженную анизотропную форму, то есть если у молекул можно четко выделить какие-нибудь характерные оси. Такие молекулы схематически изображены на рисунке 1; в них атомы располагаются не как попало, а выстроены вдоль определенной линии (рис. 1, *а*) или лежат в выделенной плоскости (рис. 1, *б*; на рисунках указаны атомы, образующие

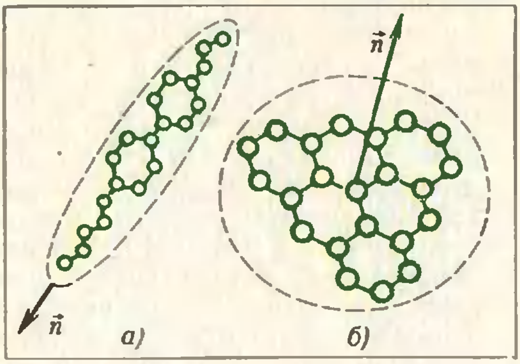


Рис. 1.

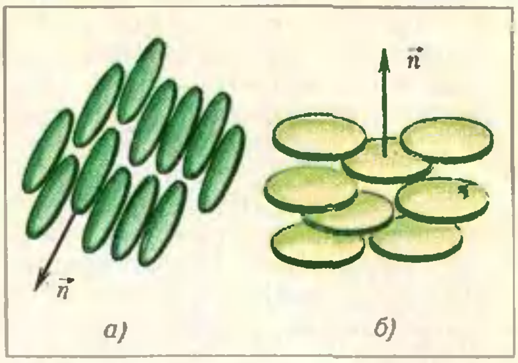


Рис. 2.

остов молекулы). Взаимодействие молекул такой формы приводит к тому, что в жидком состоянии они не только удерживаются на некотором среднем расстоянии друг от друга, но могут сохранять определенный порядок в своем относительном расположении — длинные оси молекул (рис. 2, *а*) или плоскости молекул (рис. 2, *б*) оказываются параллельными друг другу. В такой необычной жидкости появляется особое направление, как в твердом кристалле, вдоль которого ориентируются выделенные оси молекул. Это сходство между кристаллом и описанной удивительной жидкостью и привело к соединению двух понятий в одно новое — «жидкий кристалл». А жидкое состояние, изображенное на рисунке 2, называют нематическим жидким кристаллом*).

Рассмотрим теперь силы, действующие в нематической жидкости. Эти силы — электрического происхождения. Интересно, что сила притяжения возникает между двумя атомами или молекулами, которые сами по себе являются электрически нейтральными. Попытаемся на примере атомов разобраться, как это получается.

Представим себе, что по какой-то случайной причине в атоме произошло смещение отрицательно заряженного электронного облака относительно положительно заряженного ядра. Такой атом можно рассматривать как совокупность двух разноименных точечных зарядов, одинаковых по абсолютной величине, находящихся на некотором расстоянии друг от друга (рис. 3, *а*). Подобную систему зарядов называют электрическим диполем. В окрестности атома-диполя возникает электрическое поле. Напряженность этого поля быстро убывает при удалении от атома, но вблизи атома поле достаточно велико. Если в окрестность атома *I* попадает нейтральный атом *II* (рис. 3, *б*), то электрическое поле атома *I* должно сместить заряды электронов и ядра атома *II* так, как изображено на рисунке 3, *б*. Такое относительное смещение зарядов в атоме *II* должно, в свою очередь, создавать электрическое поле, поддерживающее разделение зарядов в атоме *I*.

Из рисунка 3, *б* видно, что разноименно заряженные части атомов должны притягиваться друг к другу, а значит и атомы целиком должны притягивать друг друга. При сближении атомов между ними начинают действовать силы отталкивания. На расстоянии, примерно равном размеру атомов, силы взаимодействия между атомами равны нулю.

Точно такое же рассуждение мы можем провести и в отношении двух молекул, состоящих из нескольких десятков атомов. Нейтральные молекулы должны притягивать друг друга за счет образования электрических диполей-атомов. Действительно, молекулы должны притягиваться. Но как? Ясно, что по описанным выше причинам большая часть

---

*) Название «нематический» образовано от греческого слова νῆμα — нить. В жидких кристаллах под микроскопом видны тонкие подвижные нити, которые представляют собой дефекты структуры. В идеальном жидком кристалле таких нитей нет.

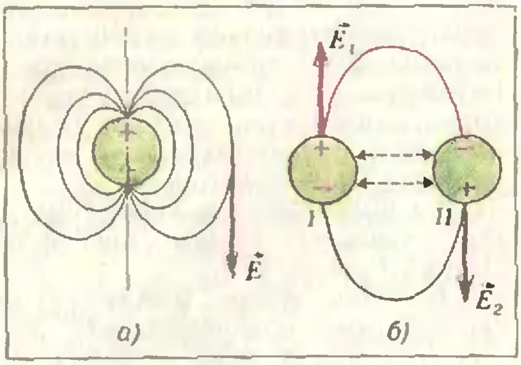


Рис. 3.

атомов одной молекулы стремится оказаться вблизи атомов другой молекулы, так как только в этом случае силы взаимодействия между молекулами обращаются в нуль. Но такая ситуация возможна только тогда, когда длинные оси молекул или плоскости молекул параллельны друг другу. Таким образом возникает определенный порядок в ориентации молекул и появляется выделенное направление. Это направление можно характеризовать единичным вектором $\vec{n}$ (см. рис. 1, 2).

Разумеется, такое параллельное расположение выделенных осей (или плоскостей) молекул возможно только при достаточно низкой температуре, когда тепловые толчки не настолько сильны, чтобы разрушить ориентационный порядок в системе молекул. При повышении температуры обязательно наступает момент, когда хаотическое тепловое движение молекул становится преобладающим и нематический порядок разрушается.

Таким образом, система таких особых молекул может иметь два состояния: обычное (изотропное) жидкое — при высоких температурах и анизотропное жидкое — при низких температурах. Подчеркнем, что нематический жидкий кристалл может быть действительно жидким, как вода, то есть центры масс молекул не образуют в данном случае какую-то правильную решетку, как в кристалле, а располагаются хаотично в пространстве и могут в нем свободно перемещаться. В то же время ориентация молекул в этой жидкости подчиняется строгому порядку. Интересно, что нематическая жидкость, образуемая молекулами вытянутой формы (рис. 2, *а*), известна уже много десятков лет, в то время как нематическая жидкость из дискообразных молекул (рис. 2, *б*) открыта только в последние 1—2 года.

Эффект Фредерикса

Наибольшее впечатление производят оптические свойства жидких кристаллов, сделавшие эти объекты столь популярными. Такие оптические эффекты очень необычны для жидкости и присущи твердому кристаллу, но теперь мы понимаем, в чем тут дело: в нематической жидкости, как и в кристалле, есть особые направления. С наличием этих направлений связаны многие замечательные свойства кристаллов и, в частности, оптические свойства. Поэтому такие особые направления называют оптическими осями. Направление оптических осей в жидком кристалле совпадает с вектором $\vec{n}$. В твердых кристаллах оптические оси жестко закреплены. А в жидких кристаллах направления оптических осей можно изменять с помощью самых разных воздействий, в том числе электрическими или магнитными полями. Эффект изменения направления ориентации молекул в нематической жидкости под действием поля наблюдался еще в предвоенные годы известным советским ученым В. Фредериксом и носит теперь его имя. Пользуясь популярными сейчас электронными часами и калькуляторами на жидких кристаллах, вы наблюдаете именно это явление — эффект Фредерикса.

Прежде чем описать эффект Фредерикса, необходимо напомнить, что такое поляризованный свет. В луче поляризованного света вектор напряженности электрического поля $\vec{E}$ колеблется вдоль единственного направления. Обычный естественный свет не имеет такой определенной поляризации, так как он состоит из всевозможных волн, каждая из которых имеет произвольное направление колебаний вектора $\vec{E}$, а все вместе они составляют неполяризованный

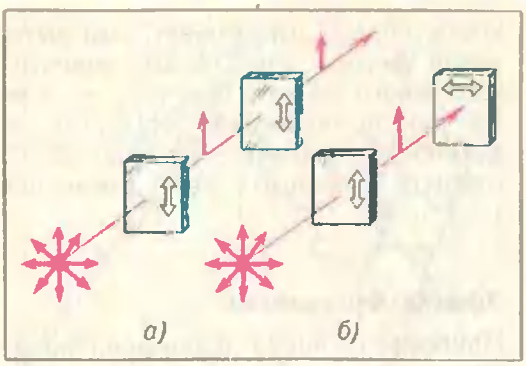


Рис. 4.

световой пучок. Особые кристаллы — поляризаторы — преобразуют неполяризованный свет в линейно поляризованный, поскольку они могут пропускать сквозь себя только волны, в которых вектор $\vec{E}$ ориентирован совершенно определенно по отношению к оптической оси поляризатора. Например, кристалл турмалина пропускает сквозь себя лишь свет, поляризованный вдоль оптической оси этого кристалла, в то время как волны с перпендикулярной поляризацией им сильно поглощаются. Если на пути светового пучка расположить два поляризатора, оси которых параллельны, то свет (поляризованный) пройдет сквозь такую оптическую систему (рис. 4, *а*), а если оси поляризаторов скрещены, то свет сквозь эту систему пройти не сможет (рис. 4, *б*).

Поместим теперь между двумя скрещенными поляризаторами два стекла, а между ними — нематическую жидкость, предварительно слегка пополировав стекла вдоль определенного направления. Такая полировка стекол нужна для того, чтобы сориентировать в заданном направлении оптическую ось жидкого кристалла ($\vec{n}$). Например, при параллельной полировке стекол молекулы, прилипшие к стеклам параллельно микробороздам на стеклянной поверхности, задают благодаря описанным межмолекулярным взаимодействиям такую же ориентацию вектора $\vec{n}$ и

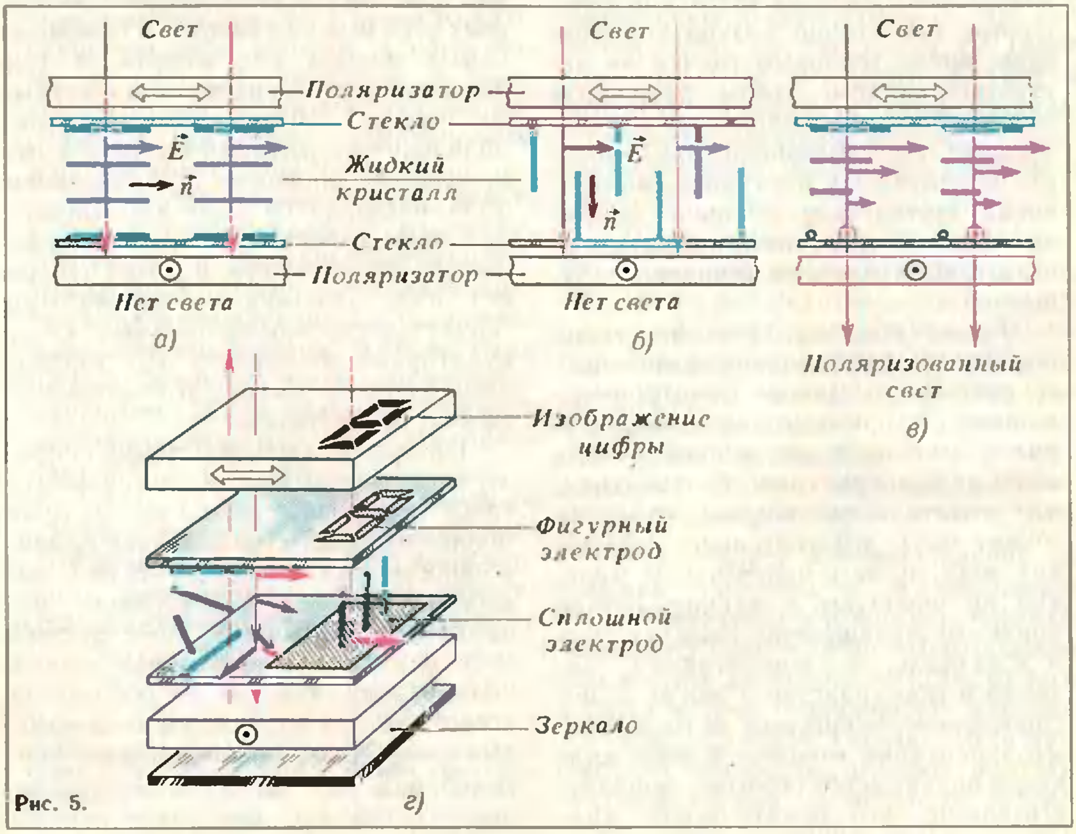


Рис. 5.

в глубине слоя нематической жидкости (рис. 5, *а*). Если неполированные стекла предварительно обработать специальными химическими веществами, то можно добиться ориентации оси $\vec{n}$ перпендикулярно стеклянной поверхности (рис. 5, *б*). Наконец, если полированные стекла развернуть перпендикулярно друг другу, то можно получить закрученную по толщине слоя ориентацию вектора $\vec{n}$ (на рисунке 5, *в* показаны проекции оси $\vec{n}$ на плоскость рисунка).

Как же проходит поляризованный свет сквозь ориентированный слой нематической жидкости и сквозь изображенные оптические системы вообще? Если поляризация света параллельна оси $\vec{n}$ (вектор $\vec{E}$ колеблется вдоль направления $\vec{n}$), то свет проходит сквозь жидкий кристалл, не изменяя своей поляризации (рис. 5, *а*). То же происходит и в случае, если поляризация света перпендикулярна оптической оси (рис. 5, *б*). В случае закрученной ориентации $\vec{n}$ поляризация света также поворачивается вслед за осью $\vec{n}$ (рис. 5, *в*).

Можно понять, почему это происходит.

Для этого вспомним основные свойства света и условия его распространения в кристаллах. Во-первых, свет как электромагнитная волна может излучаться при колебаниях электрических зарядов, например при быстром периодическом изменении расстояния между разноименными зарядами в атоме (рис. 3, *а*) или молекуле. При этом вблизи зарядов с тем же периодом изменяется электрическое поле, которое создает периодически меняющееся магнитное поле $\vec{B}$, а последнее порождает, уже на большем расстоянии от зарядов, переменное электрическое поле $\vec{E}$ и т. д. (это объясняется хорошо известным явлением электромагнитной индукции Фарадея). Так возникает в пространстве вокруг колеблющихся зарядов периодически изменяющееся электромагнитное поле. В таком электромагнитном поле, как известно, векторы $\vec{E}$ и $\vec{B}$ перпендикулярны друг другу и направлению распространения волны (рис. 6). Волны бегут по всем направлениям от источника. Если источником света является диполь, то свет преимущественно излучается в направлении, перпендикулярном оси диполя. Вдоль оси диполя излучения нет, поскольку в этом направлении магнитные поля, порождаемые колебаниями электрического поля по разные стороны от оси, в точности гасят друг друга.

Если электромагнитная волна распространяется в среде, состоящей из атомов и молекул, то колебания вектора $\vec{E}$ вызывают

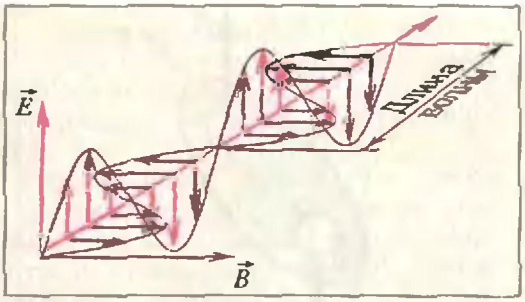


Рис. 6.

электрические колебания в атомах и молекулах. В результате возникают диполи, у которых периодически изменяется расстояние между разноименными зарядами. Но такие дипольные колебания, в свою очередь, приводят к излучению световой волны. Это означает, что в среде на самом деле распространяются как первая волна, так и вторичные волны, излучаемые молекулами и атомами под действием поля первой волны. Эти волны интерферируют друг с другом, то есть усиливают или ослабляют друг друга в зависимости от того, приходят ли они в данный момент времени в данную точку пространства в фазе или противофазе. В фазе — это значит, что амплитуды волн просто складываются; в противофазе — амплитуды вычитаются.

Что же происходит в слое жидкого кристалла при прохождении через него света? В жидком кристалле поле проходящей световой волны приводит к разделению зарядов в молекулах и возникновению дипольных колебаний. Предположим, что в молекуле кристалла электроны легко смещаются вдоль длинной оси молекулы, то есть вдоль направления $\vec{n}$. Тогда в случае, изображенном на рисунке 5,*а*, по толщине слоя распространяются падающая волна и вторичные волны, причем векторы $\vec{E}$ в волнах совпадают по направлению. В случае, изображенном на рисунке 5,*б*, диполи не образуются и вторичные волны не излучаются; значит, падающая волна проходит, не ослабляясь. Наконец, в случае 5,*в* поляризация света изменяет свое направление в соответствии с поворотом оптической оси $\vec{n}$ по толщине слоя. Поворот вектора $\vec{E}$ в такт с осью $\vec{n}$ обеспечивает излучение вторичных волн, не ослабляемое на любой глубине слоя. (Это интерференционное явление возможно тогда, когда на пути светового луча находятся многочисленные диполи — источники вторичных волн, то есть

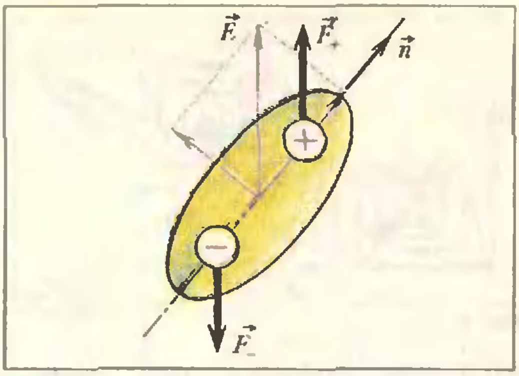


Рис. 7.

когда толщина слоя намного больше длины волны света.)

Так свет проходит сквозь слой нематической жидкости и доходит до второго поляризатора. И здесь возникает уже знакомая нам ситуация. В случаях *а* и б (рис. 5) свет сквозь оптическую систему пройти не может, а в случае *в* он проходит беспрепятственно. А теперь представим себе промежуточный случай, когда оси $\vec n$ на стенках скрещены между собой, но в толще слоя, благодаря какому-то воздействию, они повернулись почти перпендикулярно стеклам. В этой ситуации свет практически не проходит сквозь второй поляризатор. Остался еще один шаг до массового применения подобной системы: надо научиться управлять оптической осью нематической жидкости так, чтобы в отсутствие воздействия эта ось ориентировалась, как на рисунке 5,*в*, а при включении воздействия она наклонялась на заметный угол, как на рисунках 5, *б* и *г*. После выключения воздействия молекулы занимают, разумеется, свои прежние позиции вследствие условий на стеклянных поверхностях и взаимодействия между собой.

И оказалось, что именно в нематическом жидком кристалле это очень просто сделать с помощью электрического поля, заключив слой между полированными стеклами, на которые нанесены прозрачные электроды. Подключив к этим электродам слабенькую батарейку и замкнув цепь, мы сделаем нашу оптическую систему светонепроницаемой, а разомкнув цепь — прозрачной, что и осуществил впервые Фредерикс. Осталось обсудить интересный физический вопрос: почему электрическое поле поворачивает молекулы так, как нам нужно, и сколь сильным оно при этом должно быть.

Ответ на первую часть вопроса легко дать с помощью рисунка 7. Пусть молекула, у которой диполь легко образуется вдоль длинной оси, находится в электрическом поле и между векторами $\vec E$ и $\vec n$ имеется некоторый угол. Тогда в образовавшемся диполе на заряды $+Q$ и $-Q$ действуют силы $\vec F_+ = +Q\vec E$ и $\vec F_- = -Q\vec E$; таким образом, возникает пара сил, создающая крутящий момент. Этот момент сил и поворачивает молекулу так, чтобы она своей длинной осью ориентировалась вдоль вектора $\vec E$.

Здесь важно заметить, что на самом деле необходимо повернуть одновременно очень большое число таких молекул, но, к счастью, при этом нет необходимости поворачивать каждую молекулу в отдельности. Поскольку молекулы, взаимодействующие между собой, ориентированы одинаково, то, грубо говоря, достаточно толкнуть одну, чтобы другие, как костяшки домино, дружно повернулись вслед за первой. Поэтому для осуществления описанного эффекта необходимо некоторое конечное значение разности потенциалов на электродах — пороговое напряжение. Это пороговое значение определяется из условия равенства моментов двух сил: силы, действующей со стороны электрического поля, и возвращающей силы взаимодействия между молекулами, которая стремится ориентировать молекулы так, как сориентированы молекулы, прилипшие к стеклу. И оказывается, что независимо от толщины слоя пороговое напряжение может составлять доли вольта, причем толщина слоев, используемых на практике, составляет сотую долю миллиметра! Это во много раз меньше, чем требуется для получения таких же оптических эффектов в твердых кристаллах, что и обусловило громадный практический интерес к жидким кристаллам при создании циферблатов всевозможных типов.

Циферблат в упомянутых электронных часах устроен так, как показано на рисунке 5, *г*, где добавлено отражающее зеркало за вторым поляризатором, а верхний электрод имеет контур необходимой цифры. При падении сверху на этот циферблат свет свободно проходит до зеркала и отражается всюду, кроме участка, соответствующего цифре-электроду (если цепь замкнута). На участке же электрода свет, поглощаясь, не доходит до зеркала, и это место кажется темным — так появляется, скажем, черная цифра или буква на светлом фоне циферблата-индикатора. На подобном принципе работают буквенно-цифровые индикаторы в часах, калькуляторах, электронных переводчиках, в качестве шкал измерительных приборов и настройки, в разнообразных табло и т. п. Добавка красителей в слой жидкого кристалла делает эти индикаторы цветными. Кроме того, жидкокристаллические устройства с большим числом точек-электродов и сложной электронной схемой управления могут служить в качестве телевизионных экранов (плоский телевизор без электроннолучевой трубки), преобразователей изображения (приборы ночного видения), средств модуляции и сканирования светового луча в системах оптической связи, светолокации, оптической обработки информации в быстродействующих ЭВМ.

Нематические жидкости нашли широкое применение и в совсем другом плане. Оказывается, полимерные нити, получаемые из хорошо ориентированного нематического раствора полимерных молекул, приобретают огромную прочность. Это объясняется тем, что в таких нитях практически все молекулы хорошо «подогнаны» друг к другу, то есть их главные оси параллельны между собой, а это многократно усиливает межмолекулярное сцепление. Такие полимерные нити служат прекрасным средством упрочнения самых ответственных узлов в механизмах, машинах и аэрокосмических конструкциях, работающих в экстремальных условиях, то есть при очень высоких температурах и нагрузках. Есть, однако, и другие типы жидкокристаллических структур и материалов, имеющие не меньшее значение, но мы поговорим о них в следующей статье.

Геометрические задачи наших читателей

1. а) Докажите, что для любой точки N окружности, описанной около правильного треугольника ABC, разность между квадратом длины наибольшего из отрезков AN, BN, CN и произведением длин двух других из этих отрезков равна квадрату длины стороны треугольника.

б) Пусть длина стороны треугольника равна a, а длина наибольшего из упомянутых отрезков равна t. Чему равны длины двух других отрезков?

А. Дупло

2. Треугольник ABC разбит медианами AA_1, BB_1, CC_1 на шесть треугольников, в каждый из которых вписана окружность. Пусть r_1, r_2,..., r_6 — радиусы этих окружностей (рис. 1). Докажите, что

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_5}=\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_4}+\frac{1}{r_6}.$$

Р. Мазов

3. В треугольнике ABC величина угла C равна 120°. Пусть M — точка на стороне AB. Докажите, что отрезок CM является биссектрисой угла C в том и только в том случае, когда

$$\frac{1}{|CM|}=\frac{1}{|AC|}+\frac{1}{|BC|}.$$

С. Сефибеков

4. Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O. Через середину M боковой стороны CD проведена прямая MO, пересекающая сторону AB в точке N. Пусть K — точка пересечения прямой AM с диагональю BD. Известно, что $(BM) \parallel (NK)$. Найдите отношение $|AD|:|BC|$ (AD и BC — основания трапеции).

Э. Абдулаев

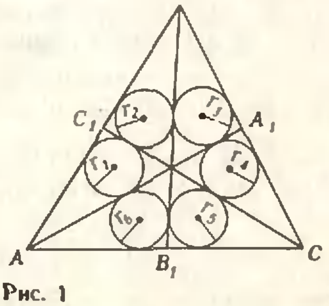


Рис. 1

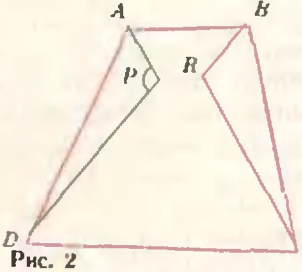
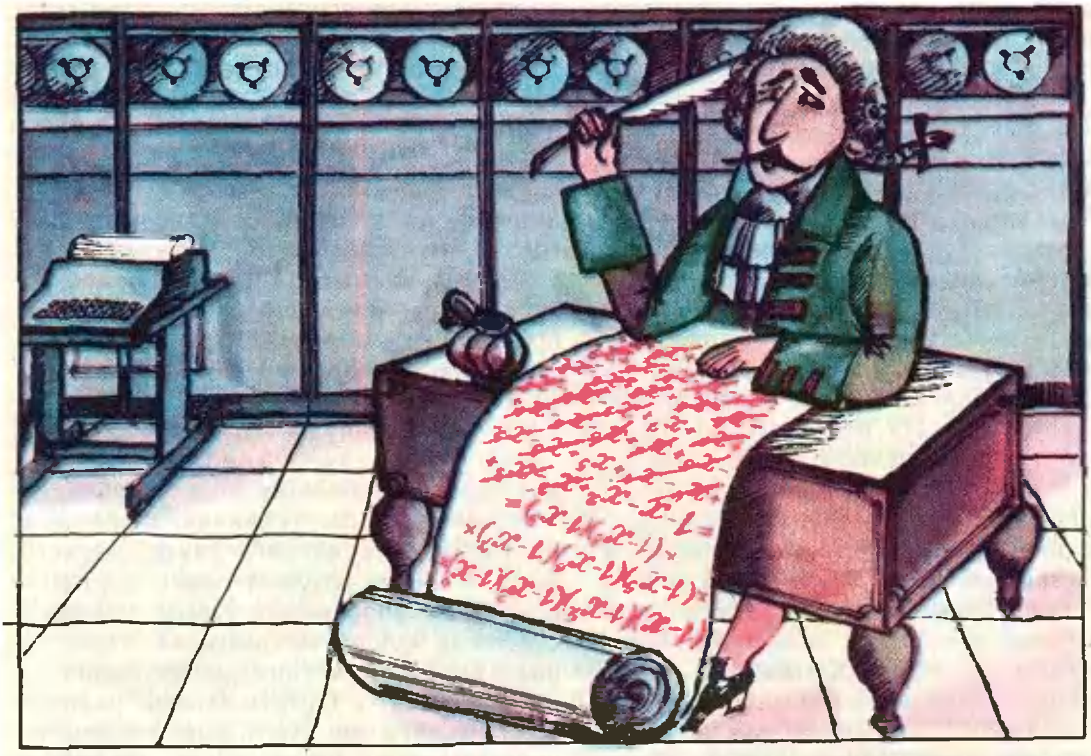


Рис. 2

5. Внутри четырехугольника $ABCD$ взяты точки P и R так, что $(AP) \parallel (CR)$, $(DP) \parallel (BR)$ и $\widehat{APD}=120°$ (рис. 2). Докажите, что если $|RC|-|AP|=|DP|-|RB|=|DC|-|AB|$, то четырехугольник $ABCD$ — трапеция.

Ф. Кабдыкаиров



Д. Фукс

О раскрытии скобок, об Эйлере, Гауссе, Макдональде и об упущенных возможностях

Сколько раз каждому из вас доводилось раскрывать скобки в произведении? Тысячи, а может быть, десятки тысяч? Если и есть в этом занятии что-нибудь привлекательное, так это надежда, что результат умножения, после приведения подобных членов, примет благоприятный вид, как, скажем,

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2,$$
$$(1-a)(1+a+\ldots+a^n)=1-a^{n+1}.$$

Ниже пойдет речь о подобных равенствах, только гораздо менее очевидных и гораздо более глубоких. Они составляют результат более чем двухсотлетней работы крупнейших математиков мира. Своим читателям я посоветую вооружиться ручкой и бумагой и повторять за мной все выкладки: это поможет не только понять содержание статьи, но и оценить степень нетривиальности ее результатов.

1. Тождество Эйлера

В середине XVIII века — дело было в 1748 году или несколькими годами раньше — Леонард Эйлер заинтересовался коэффициентами многочлена

$$\varphi_n(x)=(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots(1-x^n).$$

Он раскрыл скобки в произведении — и получил поразительный результат. Проделаем эту выкладку и мы:

$$\begin{array}{llllllllll}
\varphi_1(x)=1-x, & & & & & & & & & \\
\varphi_2(x)=1-x-x^2+x^3, & & & & & & & & & \\
\varphi_3(x)=1-x-x^2 & +x^4 & +x^5 & -x^6, & & & & & & \\
\varphi_4(x)=1-x-x^2 & & +2x^5 & & & -x^8 & -x^9 & +x^{10}, & \\
\varphi_5(x)=1-x-x^2 & & +x^5 & +x^6 & +x^7 & -x^8 & -x^9 & -x^{10} & \ldots, \\
\varphi_6(x)=1-x-x^2 & & +x^5 & & +2x^7 & & -x^9 & -x^{10} & \ldots, \\
\varphi_7(x)=1-x-x^2 & & +x^5 & & +x^7 & +x^8 & & -x^{10} & \ldots, \\
\varphi_8(x)=1-x-x^2 & & +x^5 & & +x^7 & & +x^9 & & \ldots, \\
\varphi_9(x)=1-x-x^2 & & +x^5 & & +x^7 & & & +x^{10} & \ldots, \\
\varphi_{10}(x)=1-x-x^2 & & +x^5 & & +x^7 & & & & \ldots
\end{array}$$

Многоточия обозначают части многочленов $\varphi_n(x)$, содержащие x в степенях, больших 10 (выписать эти многочлены полностью не позволяет формат журнала: многочлен $\varphi_{10}(x)$, например, имеет степень 55).

Начнем с очевидного, но важного наблюдения: коэффициенты многочлена $\varphi_n(x)$ с ростом n «стабилизируются», то есть каждый из них начиная с некоторого n не меняется. Это легко объяснить: переход от $\varphi_{n-1}(x)$ к $\varphi_n(x)$, состоящий в умножении на $1-x^n$, не оказывает никакого воздействия на коэффициенты при 1, x, ..., x^{n-1}, так что при $n>k$ коэффициент при x^k в многочлене $\varphi_n(x)$ от n не зависит. (Например, вычисленная часть многочлена $\varphi_{10}(x)$ не изменится, если вместо φ_{10} взять φ_{11}, φ_{12} и т. д.) Ввиду этого мы можем говорить о «бесконечном произведении»

$$\varphi(x)=(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\ldots,$$

понимая под этим, конечно, не многочлен, а *степенной ряд*, то есть выражение вида

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\ldots,$$

где a_0, a_1, a_2, a_3, a_4...— числа; в нашем случае a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 — стабилизирующиеся коэффициенты. Наше вычисление показывает, что

$$\begin{array}{l}
a_0=a_5=a_7=1, \\
a_1=a_2=-1, \\
a_3=a_4=a_6=a_8=a_9=a_{10}=0.
\end{array}$$

$\varphi(x)$ называется ***функцией Эйлера***.

Слово «функция» здесь употреблено не случайно: при $-1<x<1$ значения $\varphi(x)$ можно вычислить (подобно тому, как вычисляют сумму бесконечной геометрической прогрессии).

Теперь — главное. После раскрытия наших скобок очень многое уничтожается, можно сказать — почти все. Например, результат раскрытия скобок в произведении $(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^{10})$ содержит до приведения подобных 43 слагаемых с x в степенях, меньших или равных 10, в том числе 24 слагаемых с x в степенях 8, 9, 10. После приведения подобных из этих 43 слагаемых остается всего 5, в том числе ни одного с x в степенях 8, 9, 10. Более точно, как мы видели, среди коэффициентов a_0, a_1, a_2, ..., a_{10} три равны 1, два равны -1 и шесть равны 0. Выскажем осторожную гипотезу: *коэффициенты a_k всегда равны* 0, 1 *или* -1, *причем большинство из них равно* 0. Дальнейшее вычисление, которое читатель при желании сможет провести сам, не только подтверждает эту гипотезу, но и позволяет ее уточнить. Вот, например, часть ряда $\varphi(x)$, содержащая x в степенях, не превосходящих 100:

$$\varphi(x)=1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}-$$
$$-x^{35}-x^{40}+x^{51}+x^{57}-x^{70}-x^{77}+x^{92}+x^{100}\ldots$$

Надо полагать, что Эйлер, который не боялся длинных выкладок и отменно считал, примерно столько членов ряда $\varphi(x)$ и вычислил. А потом он просто не мог не заметить, что коэффициенты, отличные от 0, равны 1 или -1, и при этом единицы и минус единицы расположены не как попало, а в строго определенном порядке: две единицы, две минус единицы, две единицы, две минус единицы и т. д.*). В таблице

показатели	1, 2	5, 7	12, 15	22, 26	35, 40	51, 57	70, 77	92, 100
коэффициенты	−1	1	−1	1	−1	1	−1	1

выписаны показатели степеней x, при которых стоят ненулевые коэффициенты.

Легко угадать, что это за показатели: в n-м столбце нашей таблицы в верхней строке стоят числа $\frac{3n^2 \pm n}{2}$, в нижней — число $(-1)^n$. Если это так при всех n, мы приходим к равенству

$$(1-x)\,(1-x^2)\,(1-x^3)\ldots=1-x-x^2+x^5+x^7-\ldots+(-1)^n x^{\frac{3n^2-n}{2}}+$$
$$+(-1)^n x^{\frac{3n^2+n}{2}}+\ldots$$

или, пользуясь принятой в математике сокращенной символикой,

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(x^{\frac{3n^2-n}{2}}+x^{\frac{3n^2+n}{2}}\right).$$

Это и есть *тождество Эйлера*. Последующие поколения математиков дали этому тождеству несколько доказательств. Одно из них приводится в п. 3. (Читатель, который больше интересуется фактами, чем доказательствами, без ущерба для понимания дальнейшего может этот параграф пропустить.) А сейчас я расскажу об одном замечательном применении тождества Эйлера, которое украшает все учебники комбинаторики.

2. Тождество Эйлера и число разбиений

Пусть n — натуральное число. Обозначим через $p(n)$ число способов, которыми можно представить n в виде суммы натуральных слагаемых (при этом слагаемые в суммах могут повторяться, и представления, различающиеся лишь порядком слагаемых, считаются одинаковыми). Например:

$p(1)=1;$
$p(2)=2 \quad (2=2;\ 2=1+1);$
$p(3)=3 \quad (3=3;\ 3=2+1;\ 3=1+1+1);$
$p(4)=5 \quad (4;\ 3+1;\ 2+2;\ 2+1+1;\ 1+1+1+1);$
$p(5)=7 \quad (5;\ 4+1;\ 3+2;\ 3+1+1;\ 2+2+1;$
$2+1+1+1;\ 1+1+1+1+1).$

Числа $p(n)$ входят во многие математические формулы, и их полезно уметь вычислять. Но как это сделать? Попробуйте, например, найти $p(10)$. Вам придется изрядно повозиться, и, если повезет, вы найдете правильный ответ: 42. А если нужно знать, скажем, $p(50)$? На помощь приходит тождество Эйлера.

---

*) Мемуар Эйлера на эту тему полностью приведен в книге Д. П о й а «Математика и правдоподобные рассуждения» (М., «Наука», 1975, с. 111). Чтение этого мемуара, как и других глав книги Пойа, несомненно, доставит вам большое удовольствие.

Сначала немного «теории». Положим

$$\pi(x)=1+\mathrm{p}(1)x+\mathrm{p}(2)x^2+\mathrm{p}(3)x^3+\ldots=1+x+2x^2+3x^3+5x^4+7x^5+\ldots$$

Как и $\varphi(x)$, $\pi(x)$ — функция, определенная при $-1<x<1$. Но, опять-таки, нас она интересует только как степенной ряд.

Теорема. *Ряды* $\varphi(x)$ *и* $\pi(x)$ *взаимно обратны, то есть*

$$\varphi(x)\cdot\pi(x)=1.$$

Вы понимаете, в чем смысл этого равенства? Степенные ряды можно перемножать:

$$(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots)(b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots)=a_0b_0+a_0b_1x+a_0b_2x^2+\ldots$$
$$+a_1b_0x+a_1b_1x^2+a_1b_2x^3+\ldots+a_2b_0x^2+a_2b_1x^3+a_2b_2x^4+\ldots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2+\ldots;$$

наше утверждение означает, что если перемножить таким образом ряды $\varphi(x)$ и $\pi(x)$, то полученное произведение сведется к 1: коэффициенты при x, x^2, x^3,... будут равны нулю.

Доказательство.

$$\frac{1}{\varphi(x)}=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{1-x^k}\cdot\ldots=$$
$$=(1+x+x^2+x^3+\ldots)(1+x^2+x^4+x^6+\ldots)\times\ldots$$
$$\ldots\times(1+x^k+x^{2k}+x^{3k}+\ldots)\ldots$$

При раскрытии скобок в последнем произведении получится сумма всевозможных выражений вида

$$x^{a_1}x^{2a_2}\ldots x^{ka_k},$$

где a_1, ..., a_k — целые неотрицательные числа. Таким образом, x^n войдет в эту сумму столько раз, сколькими способами n можно представить в виде

$$a_1+2a_2+\ldots+ka_k.$$

Но это представление можно переписать так:

$$\underbrace{1+\ldots+1}_{a_1}+\underbrace{2+\ldots+2}_{a_2}+\ldots+\underbrace{k+\ldots+k}_{a_k}.$$

Мы видим, что представлений числа n в виде $a_1+2a_2+\ldots+ka_k$ столько же, сколько есть его представлений в виде суммы натуральных слагаемых, то есть $\mathrm{p}(n)$. Таким образом, коэффициент при x^n в нашем произведении равен $\mathrm{p}(n)$, то есть $\frac{1}{\varphi(x)}=\pi(x)$. Теорема доказана.

Положив для удобства $\mathrm{p}(0)=1$, напишем

$$(1-x-x^2+x^5+x^7-\ldots)(\mathrm{p}(0)+\mathrm{p}(1)x+\mathrm{p}(2)x^2+\ldots)=1$$

(коэффициенты в первом множителе пишутся согласно тождеству Эйлера!). Раскроем скобки и приравняем нулю коэффициенты при x, x^2, x^3, ..., x^n в левой части. Получим:

$$\mathrm{p}(1)-\mathrm{p}(0)=0;$$
$$\mathrm{p}(2)-\mathrm{p}(1)-\mathrm{p}(0)=0;$$
$$\mathrm{p}(3)-\mathrm{p}(2)-\mathrm{p}(1)=0;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\mathrm{p}(n)-\mathrm{p}(n-1)-\mathrm{p}(n-2)+\mathrm{p}(n-5)+\mathrm{p}(n-7)-\ldots=0$$

(в левой части последней формулы нужно писать слагаемые до тех пор, пока аргумент у p остается неотрицательным). Итак,

$$\mathrm{p}(n)=\mathrm{p}(n-1)+\mathrm{p}(n-2)-\mathrm{p}(n-5)-\mathrm{p}(n-7)+\ldots$$

Эта формула позволяет быстро составить довольно длинную таблицу чисел $\mathrm{p}(n)$. Вот практический совет, как это сделать. Возьмите лист клетчатой бумаги — лучше всего двойной тетрадный лист. Отрежьте вдоль его длинной стороны полоску шириной 3—4 клетки. Положите эту полоску перед собой вертикально и у левого среза в нижней клетке поставьте какой-нибудь знак, скажем звездочку. Затем, двигаясь вверх, поставьте в первой клетке +, во второй +, в пятой −, в седьмой —, в двенадцатой +, в пятнадцатой + и т. д., насколько хватит длины полоски (рис. 1). Оставшуюся часть листа также положите перед собой вертикально и, отступя 10—15 клеток от ее левого среза, проведите на ней вертикальную черту — сверху донизу. В клетки, прилегающие к черте слева, двигаясь сверху вниз, впишите уже известные вам числа $p(n)$, начиная с $p(0)$: 1, 1, 2, 3, 5, 7. Чтобы найти следующее значение, приложите отрезанную полоску справа к вертикальной черте так, чтобы звездочка оказалась против первой пустой клетки. Теперь из суммы чисел, стоящих против плюсов, вычтите сумму чисел, стоящих против минусов. Что получится — впишите в клетку против звездочки: это — следующее значение функции $p(n)$. Опустите полоску на одну клетку вниз и повторите то же самое. И так далее. Через несколько минут вы получите колонку чисел $p(n)$ высотой в ваш лист.

Пользуясь этим рецептом, я нашел числа $p(n)$ для $n\leqslant 50$. На это потребовалось — честно, по часам — 17минут. (Несколько первых шагов вычисления я привожу на рисунке 2; красные числа — это новые значения $p(n)$.) В частности,

$$p(50)=204\,226.$$

Представьте себе, сколько потребовалось бы времени для нахождения этого числа кустарным способом!

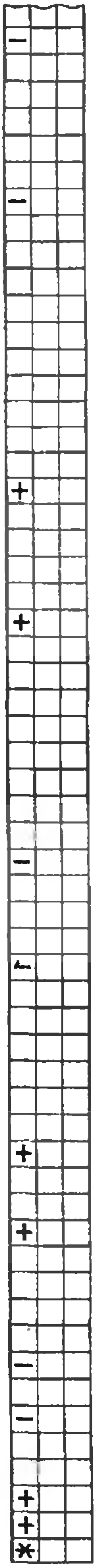


Рис. 1.

3. Доказательство тождества Эйлера

Раскроем скобки в нашем произведении

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\ldots$$

Получится сумма (бесконечная), в которой x^n встретится столько раз, сколькими способами n представляется в виде суммы возрастающей последовательности натуральных чисел: $n=n_1+n_2+\ldots+n_k$, $n_1<n_2<\ldots<n_k$; при этом знак при x^n будет +, если k четно, и —, если k нечетно. Ниже в этом параграфе наборы $(n_1, \ldots, n_k)$ с $n_1+\ldots+n_k=n$ и $n_1<\ldots<n_k$ называются просто «разбиениями».

Мы будем различать разбиения трех типов. Обозначим для разбиения $(n_1, \ldots, n_k)$ через s наибольшее число такое, что $n_k-n_{k-s+1}=s-1$, то есть s чисел $n_{k-s+1}, \ldots, n_k$ идут подряд (очевидно, $s\leqslant k$). Например, для разбиения $12=2+4+6$ $s=1$, для разбиения $12=1+5+6$ $s=2$, для разбиения $33=4+5+7+8+9$ $s=3$. Мы скажем, что разбиение $(n_1, \ldots, n_k)$ принадлежит

первому типу, если $n_1\leqslant s$, исключая случай $n_1=s=k$;
второму типу, если $n_1>s$, исключая случай $n_1=s+1$, $s=k$;
третьему типу в исключенных случаях, то есть если $s=k$ и n_1 равно s или $s+1$.

Поставим теперь в соответствие разбиению $(n_1, \ldots, n_k)$ первого типа разбиение

$$\begin{cases}(n_2, \ldots, n_{k-n_1}, n_{k-n_1+1}+1, \ldots, n_k+1), & \text{если } k-n_1\geqslant 2,\\ (n_2+1, \ldots, n_k+1), & \text{если } k-n_1=1,\end{cases}$$

которое относится, очевидно, ко второму типу (проверьте!)

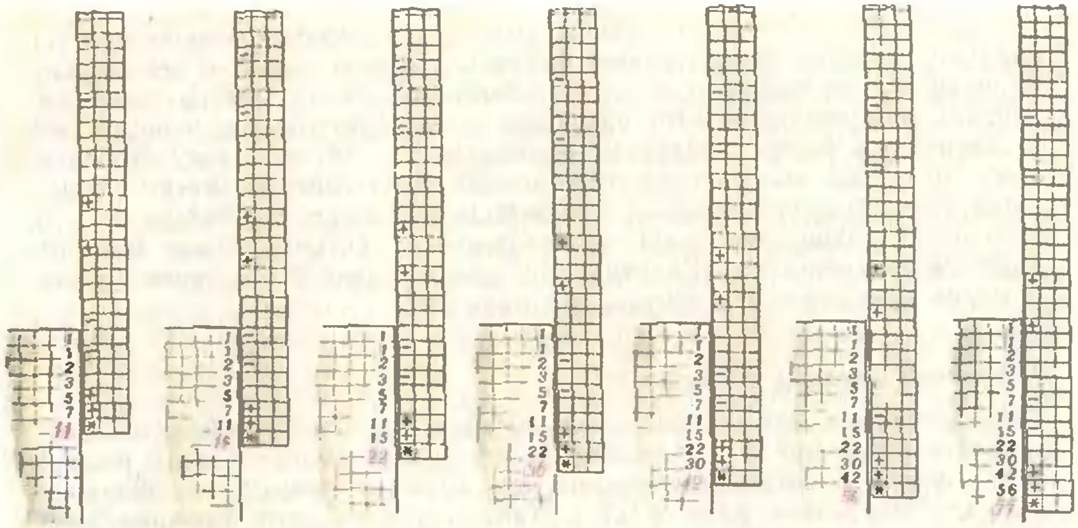


Рис. 2

Более того, таким образом между разбиениями первого и второго типа получается взаимно однозначное соответствие: обратное отображение ставит в соответствие разбиению $(n_1, \ldots, n_k)$ второго типа разбиение

$$\begin{cases} (s, n_1, \ldots, n_{k-s}, n_{k-s+1}-1, \ldots, n_k-1), & \text{если } k-s \geqslant 1, \\ (s, n_1-1, \ldots, n_k-1), & \text{если } k-s=0 \end{cases}$$

(обозначение s сохраняет прежний смысл), относящееся к первому типу (проверьте!). Поскольку наше соответствие связывает разбиения, в которых числа слагаемых различаются на 1, соответствующие этим разбиениям x^n уничтожатся, и в нашей сумме останутся только слагаемые, отвечающие разбиениям третьего типа. А разбиения этого типа, по определению, имеют вид

$$(k, k+1, \ldots, 2k-1),$$
$$(k+1, k+2, \ldots, 2k),$$

и им соответствуют $(-1)^k x^{\frac{3k^2-k}{2}}$, $(-1)^k x^{\frac{3k^2+k}{2}}$ (как вам известно, $k+(k+1)+\ldots+(2k-1)=\frac{3k^2-k}{2}$ и $(k+1)+(k+2)+\ldots+2k=\frac{3k^2+k}{2}$).

Доказательство окончено.

4. Тождество Гаусса

Прошло около 70 лет со времени открытия Эйлера, и другой великий математик, Карл-Фридрих Гаусс, сделал следующий шаг в теории, получившей (по причинам, в которые мы не вникаем) название «теория модулярных форм». Он обнаружил, что, если функцию Эйлера возвести в куб, получится ряд, быть может еще более замечательный, чем ряд Эйлера:

$$\varphi(x)^3=(1-x)^3(1-x^2)^3(1-x^3)^3\ldots=1-3x+5x^3-7x^6+9x^{10}-11x^{15}\ldots$$

(я советую вам не полениться и вычислить столько коэффициентов ряда $\varphi(x)^5$) или

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)^3=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(2n+1)x^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Это *тождество Гаусса* тем более удивительно, что квадрат функции Эйлера с виду ничем не примечателен:

$$\varphi(x)^2=1-2x-x^2+2x^3+x^4+2x^5-2x^6-2x^8-2x^9+x^{10}\ldots$$

(не радуют и дальнейшие члены этого ряда: последовательность его коэффициентов не обнаруживает никакой закономерности, в ней появляются тройки, четверки и т. д.). Глубину тождества Гаусса подчеркивает то обстоятельство, что известны его доказательства, относящиеся к совершенно разным областям математики — от геометрии Лобачевского до весьма абстрактной гомологической алгебры. Известно и доказательство, по духу близкое к доказательству тождества Эйлера из п. 3, но оно удручающе громоздко. Доказательства, которое можно было бы предложить читателям «Кванта», я не знаю. Может быть, такое доказательство придумает кто-нибудь из читателей?

5. Степени функции Эйлера

Итак, мы знаем, как устроены ряды $\varphi(x)$ и $\varphi(x)^3$, но не имеем никакой удовлетворительной формулы для $\varphi(x)^2$. А как обстоит дело с рядами $\varphi(x)^4$, $\varphi(x)^5$, ...? Иными словами: *при каких n существуют формулы для коэффициентов ряда* $\varphi(x)^n$? Для ответа на этот неформальный (то есть не имеющий точного смысла) вопрос я предлагаю использовать следующий полуформальный признак. Если при некотором n среди коэффициентов ряда $\varphi(x)^n$ часто попадаются нули — это вряд ли случайно: наверное, для $\varphi(x)^n$ есть какое-то тождество типа тождеств Эйлера и Гаусса. Впрочем, если нулей мало или нет вовсе — ничего еще не известно. По моей просьбе Е. И. Коркина вычислила на ЭВМ коэффициенты, с которыми в ряды $\varphi(x)$, $\varphi(x)^2, ..., \varphi(x)^{15}$ входят $x, x^2, ..., x^{50}$ (те из вас, кто учится в математической школе и проходит практику на ЭВМ, могут попытаться повторить это вычисление). Нет смысла приводить результаты вычисления полностью; я ограничусь таблицей, в которой $c(n)$ обозначает число нулей среди коэффициентов при $x, ..., x^{50}$ в ряде $\varphi(x)^n$:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$c(n)$	40	17	41	10	0	15	0	19	0	10	0	0	0	13	0

Констатируем: при $n=1,3$ нулей очень много (это мы уже знаем), при $n=2$, 4, 6, 8, 10, 14 их порядочно, при $n=5$, 7, 9, 11, 12, 13, 15 их нет вовсе.

Наличие нулей при $n=2$, 4 и 6 не должно нас удивлять. Дело в том, что ряды $\varphi(x)$ и $\varphi(x)^3$ настолько разрежены, что в произведениях $\varphi(x)\varphi(x)$, $\varphi(x)\varphi(x)^3$ и $\varphi(x)^3\varphi(x)^3$ некоторые члены могут отсутствовать еще до приведения подобных членов. Например, числа 11, 18, 21 (и многие другие) не представляются как суммы двух чисел вида $\frac{3n^2\pm n}{2}$ и потому члены с x^{11}, x^{18}, x^{21} отсутствуют в $\varphi(x)^2$. По аналогичной причине члены с x^9, x^{14}, x^{19} (и другие) отсутствуют в $\varphi(x)^4$, а члены с x^5, x^8, x^{14} (и другие) отсутствуют в $\varphi(x)^6$.

А вот «подскоки» числа $c(n)$ при $n=8$, 10, 14 так просто не объяснить. Оказывается, для $\varphi(x)^8$, $\varphi(x)^{10}$, $\varphi(x)^{14}$ имеются некоторые формулы, хотя и не столь изящные, как тождества Эйлера и Гаусса. (Такая формула есть и для $\varphi(x)^{15}$, но это не сказывается на нашей таблице.) Для иллюстрации я приведу формулу для $\varphi(x)^8$, по существу принадлежащую Ф. Клейну:

$$\varphi(x)^8=\sum\left[\frac{1}{3}+\frac{3}{2}(3klm-kl-km-lm)\right]x^{-(kl+km+lm)},$$

где суммирование в правой части происходит по всем тройкам k, l, m целых чисел с $k+l+m=1$.

(Хотя эта формула не особенно проста, она позволяет заметить, что если n не представляется в виде $-(kl+km+lm)$, где k, l, m — целые числа с суммой 1, то есть в виде $k^2+l^2+kl-k-l$ с произвольными целыми k, l, то член с x^n отсутствует в ряде $\varphi(x)^8$. Например, в таком виде не представляются числа, имеющие при делении на 4 остаток 3, а также числа 13, 18, 28, 29.)

Из сказанного видно, что среди целых чисел имеются некие «избранные показатели» n, для которых ряд $\varphi(x)^n$ имеет более или менее благоустроенный вид. Загадка «избранных показателей» была (тоже более или менее) разгадана совсем недавно, и главная заслуга в этом принадлежит английскому математику Яну Макдональду. Интересный рассказ об открытии Макдональда содержится в статье Ф. Дж. Дайсона «Упущенные возможности», русский перевод которой опубликован в первом выпуске журнала «Успехи математических наук» за 1980 год.

О Дайсоне и его статье стоит сказать особо. Дайсон — один из крупнейших физиков нашего времени, математик по образованию. Главная цель его статьи — показать на ряде ярких примеров, как значительные математические и физические открытия задерживались, порою на десятки лет, из-за отсутствия должного взаимодействия между специалистами в той и другой науке. Хотя статья не адресована школьникам и многое в ней будет вам непонятно, я уверен, что ее чтение доставит вам удовольствие. А здесь я приведу (с сокращениями) отрывок из этой статьи, непосредственно касающийся нашего предмета.

6. Рассказ Ф. Дж. Дайсона

«Начну с банальной истории, случившейся со мной. Это живая иллюстрация того, какие возможности упускаются по причине узкой специализации. Свою научную деятельность я начинал с теории чисел. В мои студенческие годы в Кэмбридже я учился у Г. Харди, уже тогда бывшего легендарной личностью. Даже первокурсникам в те годы было ясно, что теория чисел в духе Харди и Рамануджана устарела и блестящее будущее ее не ждет. Сам Харди в лекции о τ-функции Рамануджана назвал этот сюжет «одной из тихих заводей математики». Значения τ-функции — это коэффициенты ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) x^{n-1} = \varphi(x)^{24} = \prod_{n=1}^{\infty} (1-x^n)^{24}. \qquad (1)$$

Рамануджан открыл ряд замечательных арифметических свойств $\tau(n)$.

Доказательство и обобщение этих свойств Морделлом, Гекке и другими сыграли важную роль в развитии модулярных форм. Но сами τ-функции по-прежнему оставались тихой заводью, далекой от основного русла математики, где дилетанты могли плескаться в свое удовольствие, не тревожимые конкуренцией с профессионалами. Уже став физиком, много лет спустя, я сохранил сентиментальную привязанность к τ-функциям и отдыхал от такого серьезного дела, как физика, время от времени возвращаясь к работам Рамануджана и размышляя над многими увлекательными проблемами, которые он оставил нерешенными. Четыре года тому назад (статья Дайсона написана в 1972 году — *Д. Ф.*), во время такого отдыха от физики, я нашел новую формулу для τ-функции, столь красивую, что просто поразительно, как сам Рамануджан не додумался до нее. Выглядит она так:

$$\tau(n) = \frac{1}{1!2!3!4!} \sum (a-b)(a-c)(a-d)(a-e) \times$$
$$\times (b-c)(b-d)(b-e)(c-d)(c-e)(d-e). \qquad (2)$$

Суммирование ведется по всем пятеркам целых чисел a, b, c, d, e, имеющих при делении на 5, соответственно, остатки 1, 2, 3, 4, 0 и таких, что $a+b+c+d+e=0$, $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=10n$. Пользуясь (1), можно записать эту формулу в виде выражения для $\varphi(x)^{24}$ (сравните с приведенным выше выражением для $\varphi(x)^8$ — *Д. Ф.*).

Я пришел к ней под влиянием письма Винквиста, получившего похожее выражение для $\varphi(x)^{10}$.

Продолжая своим доморощенным способом исследования этих тождеств, я обнаружил существование столь же красивой формулы, как (2), для n-х степеней φ в тех случаях, когда n принадлежит следующей последовательности целых чисел:

$$n=3,\ 8,\ 10,\ 14,\ 15,\ 21,\ 24,\ 26,\ 28,\ 35,\ 36,\ \dots \tag{3}$$

(вот они, «избранные показатели»! — *Д. Ф.*). На этом я остановился. Довольно недолго я разглядывал странную последовательность (3). Будучи в то время теоретиком-числовиком, я ничего в ней не увидел. Перегородки в сознании помешали мне заметить, что я неоднократно встречал эти числа в качестве физика. Попадись они мне на глаза в контексте какой-нибудь физической задачи, я бы, наверное, узнал в них размерности простых алгебр Ли, если не считать число 26. Почему сюда попало 26, не знаю до сих пор».

Простите, я забыл, что вы не знаете, что такое простые алгебры Ли. Это неважно. Я постараюсь объяснить вам, что такое числа (3). Вспомните, что вращения плоскости вокруг фиксированной точки зависят от одного параметра — угла поворота. Вращения трехмерного пространства зависят от трех параметров — широты и долготы оси вращения и угла поворота. Вообще, «вращения» n-мерного пространства зависят от $\frac{n(n-1)}{2}$ параметров, а «вращения» n-мерного «комплексного пространства» — от n^2-1 параметров. К числам $\frac{n(n-1)}{2}$ и n^2-1 (то есть 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, ... и 3, 8, 15, 24, 35, ...) нужно присоединить пять «особых размерностей» 14, 52, 78, 133 и 248. Если еще выбросить, как это и делает Дайсон, числа 1 и 6, получится последовательность (3), которую, конечно, твердо помнит любой физик-теоретик.

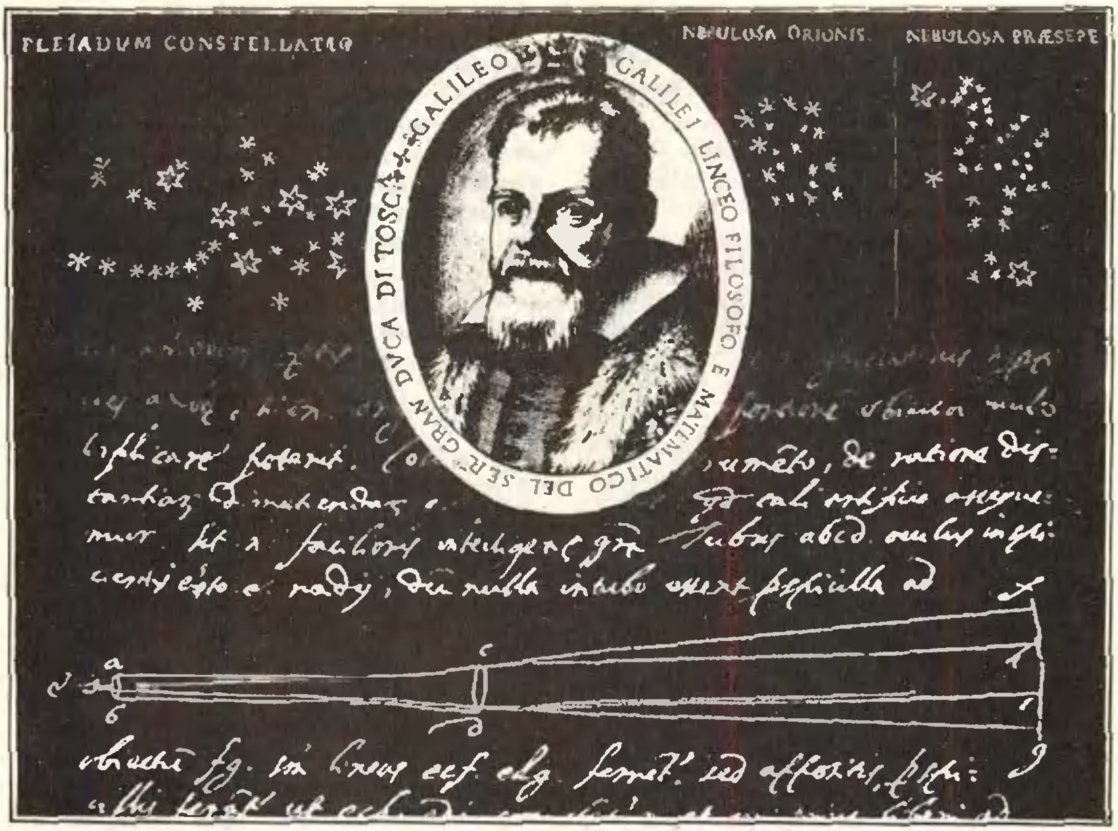
«Так я упустил возможность заметить глубокую связь между модулярными формами и алгебрами Ли только потому, что Дайсон теоретик-числовик не поговорил с Дайсоном физиком. У этой истории счастливый конец. Неизвестный мне в то время английский математик Ян Макдональд получил эти же формулы как частный случай более общей теории. Алгебры Ли входили в его теорию с самого начала, а связь с модулярными формами появилась нежданно-негаданно. Выяснилось также, что Макдональд находился в Институте высших исследований в Принстоне, когда мы оба работали над этой проблемой. Поскольку наши дочери учились в одном классе, мы виделись время от времени в течение всего его годичного пребывания в Принстоне. Но так как он был математиком, а я физиком, мы не говорили о своей работе. То, что мы думали над одним и тем же вопросом, находясь так близко друг от друга, выяснилось лишь по его возвращении в Оксфорд. Вот упущенная возможность, но не столь драматичная, поскольку Макдональд во всем разобрался и без моей помощи».

7. Заключение

Изложенная здесь теория совсем не ограничивается вычислением степеней функции Эйлера: имеется большое количество замечательных формул, в левой части которых стоят бесконечные произведения иного типа. Я надеюсь, что когда-нибудь вы пожелаете познакомиться с этим предметом более серьезно. Напоследок я покажу вам еще два тождества, которые Гаусс доказал одновременно с тождеством из п. 4:

$$(1-x)^2(1-x^2)(1-x^3)^2(1-x^4)(1-x^5)^2(1-x^6)\ldots=$$
$$=1-2x+2x^4-2x^9+2x^{16}-2x^{25}\ldots,$$

$$\frac{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)(1-x^8)\ldots}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)(1-x^7)\ldots}=1+x+x^3+x^6+x^{10}+x^{15}+x^{21}+\ldots$$



С. Гиндикин

Медичейские звезды

Молодость Галилея была безраздельно отдана механике. Более двадцати лет он целенаправленно шел к намеченной еще в юности цели: постичь законы естественных движений. Очень рано (по свидетельству Вивиани) он открыл изохронность качаний математического маятника. К 1604 г. Галилей знал закон изменения пути при свободном падении, но еще был озабочен противоречиями с фактами, казавшимися несомненными (письмо к Сарпи). Наконец, к 1609—10 гг. результаты исследований свободного падения и движения брошенных тел были доведены до полной ясности*). Оставалось только записать их; Галилей приступает к работе над всеобъемлющим мемуаром, но постепенно уделяет ему все меньше времени, пока вообще не прерывает работу на...30 лет. Что же произошло?

«Новые очки». Рассказывая о жизни великих людей, нередко приходится обращать внимание на дела житейские. Более высокое жалованье было одной из причин переезда Галилея из Пизы в Падую. Здесь его материальное положение становится более прочным. Первоначальное жалованье в 180 флоринов, хотя и медленно, увеличивалось; дополнительный доход давали молодые аристократы, с которыми Галилей занимался отдельно и которые часто жили в его доме. Однако тяжелым грузом легла на плечи Галилея выплата приданого сестрам; да и его собственная семья росла и требовала все больше средств. В 1609 г. Галилей был озабочен очередными переговорами об увеличении жалованья. Скупую и практичную

---

*) О работах Галилея по механике рассказывалось в статье «История о том, как Галилей открыл законы движения» («Квант», 1980, № 1).

синьорию Венецианской республики могло раскошелить какое-нибудь изобретение, имеющее несомненное практическое применение.

...В 1608 г. в Голландии появились зрительные трубы, позволяющие разглядывать отдаленные предметы; их называли иногда «новыми очками». Еще Леонардо да Винчи говорил об очках, позволяющих видеть Луну большой; Роджер Бэкон говорил об очках, делающих человека размером с гору. Честь изобретения оспаривали мастера-оптики Липперсгей и Андриансен.

К середине года трубы появились в Париже. Тогда же какой-то чужестранец пытался продать зрительную трубу Венецианской республике, не вдаваясь в подробности по поводу ее происхождения. Паоло Сарпи, друг Галилея, дал отрицательный отзыв о возможностях использования зрительной трубы «на войне, на суше и на море». Первые трубы были еще очень несовершенны.

Галилей услышал о трубах, когда находился в Венеции. «Узнав об этом, я вернулся в Падую, где тогда проживал, и начал размышлять над задачей. В первую же ночь после моего возвращения я ее решил, а на следующий день изготовил инструмент, о котором и сообщил в Венецию тем же самым друзьям, с которыми предшествующий день я рассуждал об этом предмете. Тотчас же я принялся за изготовление другого, более совершенного инструмента, который шесть дней спустя привез в Венецию». В «Звездном вестнике» Галилей описывал ситуацию еще более торжественным образом: «...не жалея ни труда, ни средств, я достиг того, что изготовил инструмент настолько совершенный, что при взгляде через него предметы казались почти в тысячу раз крупнее и более чем в тридцать раз ближе, чем видимые естественным образом. Совсем излишне было бы перечисление того, насколько удобны такие инструменты как на суше, так и на море».

На самом деле характеристики труб были более скромными. Первая труба Галилея давала трехкратное увеличение, а труба, привезенная в Венецию,— восьмикратное. Галилей решил при помощи своей совершенной трубы снискать расположение членов синьории (быть может, это была идея Сарпи). 21 августа самые уважаемые люди Венеции рассматривали с колокольни собора Св. Марка отдаленные кварталы города, а 24 августа Галилей торжественно передал свою трубу в дар Венеции. Галилей не скупился на рекламу своего подарка. В послании дожу Венеции Леонардо Донато он говорит, что извлек идею прибора «из наиболее сокровенных соображений о перспективе».

Потом много говорили, что Галилей присвоил себе чужое изобретение (об этом идет речь в пьесе Брехта «Жизнь Галилея»). Сам Галилей, по крайней мере в публикациях, всегда признавал, что построил свою трубу, услышав об изобретении голландцев (но не имея подробной информации и не видя «фламандской перспективы»). Позднее он подчеркивал оригинальность своего пути. «Теперь мы достоверно знаем, что голландец — изобретатель телескопа был простым мастером, изготовлявшим обыкновенные очки. Случайно перебирая стекла разных сортов, он взглянул сразу через два стекла, одно выпуклое, другое вогнутое, находившиеся на разных расстояниях от глаза... и таким образом открыл инструмент. Я же, движимый вышеупомянутым известием, нашел инструмент путем рассуждения.»

Можно сказать, что Галилей продемонстрировал превосходство теории над практикой. Многие годы никто не мог создать трубы, сравнимой по возможностям с трубами Галилея (из-за этого, в частности, не получали подтверждения астрономические наблюдения Галилея).

Труба Галилея выполнила свое назначение: ему было назначено пожизненно годовое жалование в тысячу флоринов, невиданное для математика. Галилей должен был изготовить 12 труб для синьории, а никому больше труб не предоставлять.

«Звездный вестник». Вскоре Галилей имел трубу с 20-кратным увеличением, а потом он «оставив дела земные... обратился к небесным». В конце 1609 г. Галилей рассматривает через трубу Луну и обнаруживает, что «поверхность Луны не гладкая и не ровная и не в совершенстве сферическая, как полагал в отношении ее целый легион философов, а, напротив того, неровная, шероховатая, испещренная углублениями и возвышенностями, наподобие поверхности Земли». Кроме того, Галилей обращает внимание на пепельный свет на части Луны, не освещенной Солнцем. Он считает этот свет «отблеском Земли». Позднее оказалось, что в то же время начали наблюдения небесных тел при помощи телескопа англичанин Харриот и его ученик Лоуэр (их наблюдения не были известны современникам). Лоуэр писал в письме учителю, что Луна напомнила ему пирог с вареньем, испеченный его кухаркой на прошлой неделе. О пепельном свете на Луне говорили уже Леонардо да Винчи и Местлин, учитель Кеплера.

Затем перед глазами Галилея Млечный Путь распался на отдельные звезды: «все споры, в течение веков мучившие философов, умолкли сами собой благодаря наглядности и очевидности... Млечный Путь представляет собой не что иное, как скопление бесчисленного множества звезд, как бы расположенных в кучах...»

Наконец, 7 января 1610 г. Галилей направил трубу в сторону Юпитера. Вблизи Юпитера он обнаружил три звезды. Он не сомневался, что видит обычные «неподвижные» звезды, но что-то привлекло его пристальное внимание. На следующую ночь Галилей, «водимый неизвестно какой судьбой», вновь рассматривает Юпитер. Он имел все основания не сожалеть! Он вновь увидел знакомые звезды, но... их положение относительно Юпитера изменилось: вчера они располагались по разные стороны Юпитера, а сегодня — все были по одну сторону. Пока еще можно продолжать считать звезды неподвижными, а изменение их взаимного положения объяснить движением Юпитера. 9 января «небо со всех сторон было обложено тучами». 10 и 11 января Галилей нашел только две из трех звезд. 13 января...появилась четвертая!

Зреет новое решение: эти звезды перемещаются относительно Юпитера, это его спутники — лу́ны, и их исчезновение объясняется их затмением. К концу месяца, «переходя от ощущения загадки к чувству восхищения», Галилей абсолютно уверяется в этом. Он пишет флорентийскому министру Винте: «наибольшим из всех чудес представляется то, что я открыл четыре новые планеты и наблюдал свойственные им их собственные движения и различия в их движениях относительно друг друга и относительно движений других звезд. Эти новые планеты движутся вокруг другой большой звезды таким же образом, как Венера и Меркурий и, возможно, другие известные планеты движутся вокруг Солнца».

До 2 марта Галилей наблюдает за спутниками Юпитера, пользуясь каждой безоблачной ночью, а уже 12 марта выходит его знаменитый «Звездный вестник, возвещающий великие и очень удивительные зрелища и предлагающий на рассмотрение каждому, в особенности же философам и астрономам, то, что Галилео Галилей, флорентийский патриций, Государственный математик Падуанской гимназии, наблюдал с помощью подзорной трубы, недавно им изобретенной, на поверхности Луны, среди бесчисленных неподвижных звезд, в Млечном Пути, туманных звездах и прежде всего на четырех планетах, вращающихся вокруг звезды Юпитера на неодинаковых расстояниях с неравными периодами и с удивительной быстротой».

А дальше... На все сказанное выше наложились дела житейские. Оказалось, что жалование прибавят только через год, а кроме того, Галилея стали очень тяготить преподавательские обязанности. Он начинает думать о переезде во Флоренцию. Только что умер герцог Фердинандо Медичи, и на престол вступил Козимо II Медичи, бывший ученик Галилея. Покровительство герцога может быть незаменимым при решении многих проблем...

А пока Галилей предлагает через Винту назвать спутники Юпитера в честь Козимо Медичи Космейскими или Медичейскими звездами. Был выбран второй вариант. Количество спутников удачно совпадало с тем, что у Козимо было три брата. «Звездный вестник» посвящается Козимо Медичи: «Называя новые звезды, открытые мной, величавым именем рода Медичи, я сознаю, что если прежде возвышение в звездный мир служило для прославления богов и властелинов, то в данном случае, наоборот, величавое имя Медичи обеспечит бессмертное воспоминание об этих звездах.» Потом все четыре спутника получили собственные имена (Ио, Европа, Ганимед, Каллисто), а чтобы отличать их от открытых позднее спутников Юпитера*), их будут называть галилеевыми.

На пасхальные каникулы Галилей отправился во Флоренцию. Он везет с собой трубу, чтобы герцог мог сам увидеть «свои» звезды. Галилей окружен почетом, в его честь должна быть выбита медаль с изображением Медичейских звезд, вчерне договариваются об условиях переезда, лишь уточняется название должности Галилея. Государю приятно увековечить свое имя на небе, никто из царственных особ не может похвастаться этим. 14 мая Галилей получает из Франции письмо от 20 апреля, в котором его просят «открыть возможно скорей какое-либо небесное тело, которому могло бы быть дано имя его величества». Речь идет о Генрихе IV. Уточняется, что звезду следует назвать «именем Генриха без добавления Бурбон». Оказалось, что автор письма не зря торопил Галилея: пока шло письмо, «сопутствуемый счастьем государь» был убит.

А тем временем начали упорно распространяться слухи, что «подаренные» герцогу звезды — плод фантазии Галилея или порождение его трубы. Об этом говорил даже Христофор Клавий, первый математик Римской коллегии. Положение осложнялось тем, что никто из астрономов, кроме самого Галилея, Медичейских звезд не видел. Галилей расплачивался за то, что ни у кого не было столь совершенных труб, как у него.

Герцога одолевают сомнения. Открытие Галилея должны подтвердить три самых знаменитых астронома: Кеплер, Маджини, Клавий. А пока вопрос о переезде во Флоренцию откладывался.

Кеплер, Маджини, Клавий. Казалось, что проще всего обстоит дело с Маджини. Галилей по дороге из Флоренции в Падую остановится в Болонье и покажет ему открытые звезды. Маджини, славившийся в равной мере своими вычислительными способностями и хитростью, подчеркнуто предупредителен, но делает вид, что не может ничего увидеть около Юпитера. Он не спорит, готов объяснить все своим ослабевшим зрением, но это слабое утешение для Галилея.

Кеплер сразу откликнулся на сообщение об открытии Галилея. Уже 19 апреля он пишет восторженное письмо.

Оказывается, известие о новых планетах пришло в Германию еще в середине марта «через скороходов». Первоначальная информация была расплывчата. Кеплер испугался, что Галилей открыл новые (сверх шести) планеты в Солнечной системе, а Кеплер твердо держался мнения, что планет ровно шесть (это следовало из его теории, связывающей орбиты планет с правильными многогранниками). Фантазия Кеплера рождает еще одну возможность: все планеты подобно Земле имеют по одной Луне; их, должно быть, и открыл Галилей: «если Земля, по Копернику, одна из планет, имеет свою движущуюся вокруг нее Луну и выходящую из общего счета, то, конечно, могло случиться, что Галилей действительно мог увидеть еще четыре луны, вращающиеся в очень тесных пределах вокруг малых тел Сатурна,

---

*) В настоящее время известно 16 спутников Юпитера (три последних были открыты во время полета американских автоматических станций «Вояджер»).

Иоганн Кеплер

Юпитера, Марса и Венеры; Меркурий же, самый последний из окружения Солнца, настолько погружен в его лучи, что в нем Галилей до сих пор не мог заметить чего-нибудь подобного». Кеплер повсюду ищет числовые закономерности! Затем он думает о том, что речь может идти о планетах, вращающихся около «неподвижных звезд», а не Солнца. Вспоминает бесчисленные миры Джордано Бруно и уже думает «о возможности после этого начала сделать открытия там еще бесчисленного множества новых планет».

Тем временем император Рудольф II (Кеплер был императорским астрономом) получает «Звездный вестник». Кеплер безоговорочно доверяет сообщению Галилея: «Может быть, я покажусь слишком смелым, если так легко поверю твоим утверждениям, не подкрепившись никаким собственным опытом. Но почему же мне не верить ученейшему математику, о правоте которого свидетельствует самый стиль его суждений, который далек от суетности и для стяжания общего признания не будет говорить, что видел то, чего на самом деле не видел, не колеблясь из любви к истине противоречить распространеннейшим мнениям». Кеплер указывает Галилею на ряд предшественников (Местлин говорил о пепельном свете Луны, Порто предсказывал возможность создания зрительной трубы). Кеплер надеется, что Солнце ярче неподвижных звезд, и ему хочется верить в исключительность нашего мира: «наш мир не принадлежит к простому стаду других бесконечных». Нет предела фантазиям Кеплера: «не будет непохожим на истину предположение, что не только на Луне, но и на Юпитере имеются жители... Дай корабли или приспособь паруса к небесному воздуху, и найдутся люди, которые не побоятся и такой обширности».

Самого Кеплера, разумеется, волнуют закономерности в распределении числа спутников у планет: «Лучше я пожелаю, чтобы у меня была готова зрительная труба, с которой я обогнал бы тебя в открытии двух (так, мне кажется, требует пропорция) спутников Марса и шести или восьми Сатурновых, к которым, может быть, прибавится один-другой вокруг Венеры и Меркурия». (Кеплер не знал, остановиться ему на арифметической или геометрической прогрессии!)

Маджини пытается привлечь Кеплера на свою сторону. Кеплер поначалу неумолим: «Мы оба коперниканцы — свой своему радуется». Но Маджини не унимается. У него цель — «этих четырех новых прислужников Юпитера изгнать и уничтожить». Серию памфлетов против Галилея открыл в мае 1610 г. Мартин Горкий, астроном из окружения Маджини. В его «Кратчайшем странствии против «Звездного вестника» спутники Юпитера объявлялись оптическим обманом. Кеплер не постоянен в своем отношении к Горкому. В письме к Галилею это сочинение называется наглым, он «удивляется дерзости этого юнца». Самому Горкому Кеплер пишет: «не удивляюсь и не обвиняю тебя; мнения философствующих должны быть свободными».

Кеплера начало волновать от-

Антоний Маджини

сутствие подтверждений. Он сам все еще не имел подходящей трубы. Из Болоньи пришло заключение университета, что в собственную трубу Галилея звезды не видны (инсценировка Маджини). В августе обеспокоенный Кеплер пишет Галилею: «Я не могу скрыть от тебя, что в Прагу приходят письма многих итальянцев, что при помощи твоей зрительной трубы нельзя видеть эти планеты... Поэтому я прошу тебя, Галилей, чтобы ты возможно скорее привел некоторых свидетелей... На тебе одном лежит все доказательство истинности наблюдения». К счастью, император Рудольф II, известный не только своими причудами, но и любовью к наукам, воспылал страстью к зрительным трубам. Наконец, в Праге появилась достаточно совершенная труба, и в сентябре Кеплер наблюдал спутники Юпитера. Участники наблюдения независимо зарисовали положения звезд и рисунки совпали. «Ты победил, Галилеанин!» — воскликнул Кеплер.

В сентябре спутники Юпитера видел Сантини в Венеции, а в декабре пришло особенно радостное известие: спутники наблюдал Клавий. Правда, он еще не был уверен, планеты это или нет. В сентябре Галилей переехал во Флоренцию. Он вступает в переписку с Клавием (находясь в Венецианской республике, переписываться с иезуитами было нельзя). «Воистину Вы, Ваша милость, заслуживаете великой похвалы, поскольку Вы первый, кто это наблюдал» — пишет Галилею Клавий. Нашел Галилей путь и к сердцу Маджини. Он рекомендовал его работы по зажигательным стеклам герцогу, способствовал получению освободившейся кафедры в Падуе (Маджини претендовал на это место еще когда Галилей переезжал в Падую из Пизы). Осторожный Маджини положительно отзывается о свидетельстве Сантини. На большее рассчитывать не приходилось.

Год великих открытий. 1610 год, начавшийся открытием спутников Юпитера, был необычайно счастливым для Галилея-астронома: почти все свои замечательные астрономические наблюдения он сделал именно в этом году. 25 июля Галилей снова наблюдал «Юпитера утром на Востоке вместе с его свитой». После этого он обнаружил «еще другое необычайное чудо». Он сообщает о своем открытии во Флоренцию, прося держать его в тайне до публикации: «Звезда Сатурна не является одной только, но состоит из трех, которые как бы касаются друг друга, но между собой не движутся и не меняются..., причем средняя из них примерно в три раза больше, чем две боковые; и они расположены в такой форме oOo».

Кеплеру Галилей посылает зашифрованную в виде анаграммы фразу: «Высочайшую планету тройною наблюдал». Позднее Галилей писал: «Я нашел целый двор у Юпитера и двух прислужников у старика [Сатурна — *С. Г.*], они его поддерживают и никогда не отскакивают от его боков».

Пять месяцев не раскрывал Галилей своей тайны. Кеплеру и Рудольфу II не терпелось узнать разгадку, строились самые невероятные предположения. «Удовлетвори как можно быстрее наше страстное жела-

Христоф Клавий

ние узнать, в чем состоит твое новое открытие. Не существует человека, которого ты мог бы опасаться как соперника». Галилей раскрыл тайну, добавив, что в более слабую трубу Сатурн напоминает маслину. Открытие Галилея впервые упоминается в печати в предисловии к «Диоптрике» Кеплера, которая была опубликована в 1611 г.

Через два года Сатурн неожиданно перестал быть тройным. Галилей связал это с движением Сатурна вокруг Солнца и предсказал, что скоро его снова можно будет наблюдать в виде трех звезд. Предсказание сбылось, но тайны Сатурна Галилей не разгадал. Тайна раскрылась, когда в 1655 г. Гюйгенс, рассматривая Сатурн в телескоп с 92-кратным увеличением, обнаружил, что Сатурн окружен кольцом, которое при меньшем увеличении казалось боковыми звездами. Кольцо становится незаметным, когда к земному наблюдателю оно обращено ребром. Это редкое явление и посчастливилось наблюдать Галилею. Такова была эволюция зрительных впечатлений от Сатурна по мере усиления телескопов: от маслины до шара, окруженного кольцом. Гюйгенс открыл также самый большой спутник Сатурна — Титан.

Вскоре после того как было послано письмо Кеплеру с разгадкой анаграммы, появились новости и о других планетах. Галилей давно пристально наблюдал за Венерой. С Венерой и Меркурием было много хлопот и у сторонников Птолемея, и у сторонников Коперника. Первые не могли договориться, где помещаются их «сферы» — внутри «сферы» Солнца или вне ее. Для сторонников Коперника было ясно, что если эти планеты являются темными телами, то, поскольку они располагаются между Солнцем и Землей, временами должны наблюдаться неполные диски планет (явление, подобное фазам Луны). Этой проблемы не возникает, если предполагать, что планеты светят собственным светом (по-видимому, так думал Кеплер) или что они прозрачны (эта возможность серьезно обсуждалась).

Об этой проблеме напоминает Кастелли в письме Галилею от 5 декабря 1610 г. «Поскольку (как я верю) правильно положение Коперника, что Венера вращается вокруг Солнца,— пишет Кастелли,— то ясна необходимость того, чтобы она наблюдалась нами иногда рогатой, иногда же нет..., если, однако, небольшая величина рогов и испускание лучей не мешают нам постоянно наблюдать эти различия». Но вряд ли Галилей нуждался в этом напоминании. Уже 10 декабря он отправляет в Прагу Кеплеру через тосканского посла Джулиано Медичи шифрованное сообщение об открытии фаз Венеры с сопроводительным письмом: «Я посылаю Вам шифрованное сообщение о еще одном моем необычном наблюдении, которое приводит к разрешению важнейших споров в астрономии и которое содержит важнейший аргумент в пользу пифагорейской и коперниканской системы». Кеплеру, как всегда, не терпится узнать разгадку.

Но первым, кому Галилей раскрыл свою тайну, был Клавий. Галилей только что получил от Клавия известие, что астрономы Римской коллегии наблюдали и спутники Юпитера, и удлиненную форму Сатурна. Поддержка Римской коллегии играла особую роль в планах Галилея, и он спешит удивить Клавия своим новым открытием. Галилей описывает свои наблюдения над Венерой после «ее вечернего появления», рассказывает о том, как неожиданно ее круглая форма стала искажаться со стороны, обращенной к Солнцу, пока Венера не стала напоминать полукруг; потом она «стала заметно рогатой»; предсказывает, какую форму будет принимать Венера, когда она будет наблюдаться в виде утренней звезды. И вот вывод: «Так вот, синьор мой, выясняется, как Венера (и несомненно, что то же самое сделает и Меркурий) движется вокруг Солнца, являющегося вне всякого сомнения центром наибольших обращений всех планет. Кроме того, мы уверены, что эти планеты сами по себе являются темными и блестят только освещенные Солнцем, чего, как я думаю, не происходит с неподвижными звездами по некоторым моим наблюдениям». У Клавия не должно было остаться сомнений в том, куда клонит Галилей.

Так закончился для Галилея год его великих астрономических открытий.

Галилей и в дальнейшем не прекращал астрономические наблюдения. Но никогда уже не будет он уделять столько времени совершенствованию телескопа, и никогда тайны мироздания не будут открываться ему так, как в этот замечательный 1610 год! Достижения Галилея были столь велики, что пройдет не менее полувека, прежде чем в наблюдательной астрономии появятся открытия, сравнимые с открытиями Галилея (Гюйгенс, Кассини).

А пока Галилея начинают волновать другие проблемы, и для решения этих проблем ему важно поехать в Рим.

Покорение Рима. Галилей прибыл в Рим 29 марта 1611 г.; он прибыл как лицо, пользующееся особым вниманием тосканского герцога (в герцогских носилках, остановился в римском дворце Медичи). Любезно приняли Галилея четыре астронома Римской коллегии — Клавий, Гринберг, Малькотий, Лембол. Галилей узнает, что отцы-иезуиты систематически наблюдают в трубы Медичейские звезды, пытаются определить их периоды. 21 апреля один из руководителей Священной службы кардинал Роберт Беллармино посылает им официальный запрос «о новых небесных наблюдениях одного выдающегося математика» (имя не указано) относительно Млечного Пути, Сатурна, Луны, спутников Юпитера. 24 апреля был получен ответ, в основном подтверждающий наблюдения Галилея.

14 апреля Галилей становится пятым членом Академии Линчеев (рысьеглазых), основанной восемь лет назад Федерико Чези, маркизом Монтичелли. Эта Академия ставила своей целью свободное, не связанное никакими рамками изучение природы. Чези писал Галилею: «Те же, кого мы примем, не будут рабами ни Аристотеля, ни какого-нибудь другого философа, а людьми благородного и свободного образа мыслей в исследовании природы». Теперь Галилей ставит на своих работах имя Галилео Линчео.

На вершине Яникульского холма состоялась демонстрация удивительной трубы Галилея (Чези предложил называть ее телескопом).

Галилея чествует Римская коллегия. Доклад, получивший название «Звездный вестник Римской коллегии», читает Одо Малькот. Он называет Галилея «самым знаменитым и счастливейшим из живущих ныне астрономов». Кардинал дель Монто писал герцогу: «Галилей в дни, когда был в Риме, доставил много удовлетворения и, думаю, получил его сам, ибо имел возможность столь хорошо демонстрировать свои открытия, что все достойные и сведущие люди этого города признали их не только достовернейшими и действительнейшими. Если бы мы жили теперь в республике Древнего Рима, то я убежден, что ему бы воздвигли статую на Капитолии, дабы почтить его исключительную доблесть».

Эпилог. Так закончился краткий, но очень продуктивный период в научной жизни Галилея, когда он активно занимался астрономическими наблюдениями. Он продолжался едва ли больше года. Галилей не вернулся к прерванной работе над трактатом по механике. Он уверен, что имеет решающие аргументы в пользу гелиоцентрической системы мира, и все силы отдает пропаганде этих идей.

Галилею еще суждено было вспомнить про Медичейские звезды. С 1636 г. он вел переговоры с Генеральными Штатами Голландии об использовании наблюдений над затмениями спутников Юпитера для измерения долготы на борту корабля. Речь шла о решении одной из самых актуальных задач XVII века*). Переговоры окончились безрезультатно. Но в связи с этими переговорами Галилей вернулся к давно интересовавшей его задаче о вычислении периодов обращения открытых им спутников и безуспешно пытался при помощи опытного в вычислениях монаха Реньери составить таблицы движения. Задача оказалась трудной, и она еще долго доставляла неприятности астрономам. Весьма точные наблюдения и вычисления провел в 1672 г. Кассини в Парижской обсерватории и обнаружил нестабильность во времени наступления затмений. В 1676 г. Ремер объяснил эти аномалии тем, что в моменты разных затмений расстояние между Землей и Юпитером бывает разным, и впервые измерил скорость света.

* * *

Рассказывая сегодня об открытии Галилея, нельзя не вспомнить о том, что при помощи космических аппаратов «Вояджер-1», «Вояджер-2» удалось узнать, как устроена поверхность галилеевых спутников Юпитера. Вот что пишет Дж. Эберхарт об увиденном учеными на переданных снимках: «Оказалось, что «галилеевы луны» вовсе не «коллекция скалистых шаров». Пожалуй, только испещренная кратерами поверхность Каллисто, самого дальнего из четырех спутников, подтвердила предположения ученых. На Ганимеде взорам исследователей открылась целая гамма тектонических разломов, искривлений и отрогов. Но совершенно ошеломили их два других спутника, более близких к планете,— Ио и Европа. Ученые не могли поверить своим глазам — на снимках Ио они уидели разукрашенный в красное и золотое, серебряное и черное бурлящий мир, царство активных вулканов! А когда объективы «Вояджеров» были направлены на Европу, взорам наблюдателей предстала ледяная планета, светлая поверхность которой была словно исхлестана гигантской плетью.»

---

*) Об этом можно прочитать в статье «Маятниковые часы» («Квант», 1974, № 9).

Наша обложка

Если к некоторой кривой провести очень много касательных, а затем — перпендикуляры к ним в точках касания (они называются нормалями), то в большинстве случаев мы увидим, что эти нормали будут касательными к некоторой новой кривой; эту новую кривую называют огибающей семейства нормалей или эволютой исходной кривой. Эволюту эллипса, изображенную на первой странице обложки, нарисовала ЭВМ по программе, составленной Ю. Котовым (прямые на рисунке — это нормали). Попробуйте самостоятельно нарисовать эволюты каких-нибудь известных кривых — например, синусоиды и параболы, а также кривой, задаваемой уравнением $(x^2+y^2-2x)^2=x^2+y^2$ (вручную это сделать не так-то легко!).

А. Боровой, А. Херувимов

Колебания и маятники

Уже не в первый раз Лаборатория «Кванта» обращается к опытам с маятниками. Это и понятно — теория колебаний, которая применяется во многих областях физики и техники, может быть просто и наглядно представлена в таких опытах.

Предлагаемая статья состоит из двух частей. В первой приводятся описания некоторых опытов; для их проведения не требуется никакого специального оборудования. Проделать опыты и качественно объяснить полученные результаты сможет каждый.

Во второй части статьи дается количественное объяснение некоторых явлений. Оно будет понятно тем, кто знаком с темой «Механические колебания», изложенной в самом начале учебника для 10 класса.

Эксперименты и наблюдения

Сейчас уже невозможно проверить легенду о том, как Галилей, стоя на молитве в соборе, внимательно наблюдал за качанием бронзовых люстр. Наблюдал и определял время, затраченное люстрой на движение туда и обратно. Это время потом назвали периодом колебаний. Часов у Галилея не было, и, чтобы сравнить периоды колебаний люстр, подвешенных на цепях разной длины, он использовал частоту биения своего пульса.

Давайте и мы начнем с аналогичных простых опытов.

1. Возьмите небольшой по размерам грузик (лучше всего — гирьку для весов) и привяжите к нему прочную нить или леску (рис. 1). Вы получите простейший так называемый *математический маятник*. Подвесьте маятник, например к гвоздю, и начинайте опыты.

Меняя массу грузика и длину лески, вы можете убедиться в том, что период колебаний такого маятника не зависит от массы грузика, но зависит от длины лески: с увеличением длины l лески период колебаний T увеличивается. Такие выводы сделал и Галилей.

Точная формула для периода колебаний маятника $T=2\pi\sqrt{l/g}$ появилась значительно позже. Ее вывел Гюйгенс. Проверьте эту формулу для вашего маятника.

Понаблюдайте за маятником некоторое время и вы заметите, что размах (амплитуда) его колебаний постепенно уменьшается — колебания затухают. Причем затухание происходит тем быстрее, чем меньше масса грузика. Обратите на это внимание. Несколько позже нам это понадобится.

2. Вбейте два гвоздя на расстоянии приблизительно 30 см друг от друга по горизонтали и прикрепите к ним маятники. Массу одного грузика возьмите равной $m_1=100$ г, а массу второго — $m_2=500$ г. Длину нити первого маятника выберите равной $l_1=1$ м, а длину нити второго маятника нужно будет изменять, например, так: $l_2=0{,}5$ м; 0,7 м; 1 м; 1,2 м; 1,5 м.

Возьмите медную проволоку диаметром около 0,3 мм и сделайте из нее мягкую пружинку длиной 30 см (например, навейте проволоку на обычный круглый карандаш и затем аккуратно снимите).

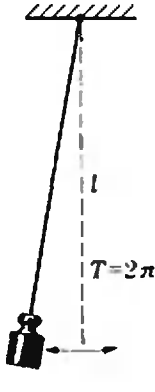


Рис. 1.

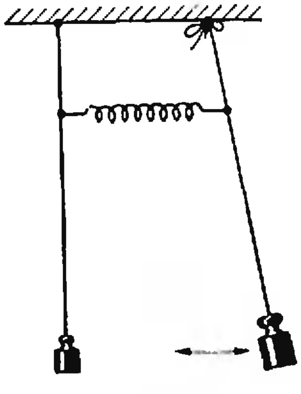


Рис. 2.

Теперь соберите всю «установку», как показано на рисунке 2. Это — так называемые *связанные маятники*. С ними можно проделать много интересных опытов.

Слегка раскачайте тяжелый (второй) маятник и предоставьте систему самой себе. Повторите опыт несколько раз, меняя длину нити тяжелого маятника. Как ведет себя при этом легкий (первый) маятник?

Когда разность длин нитей обоих маятников велика, колебания второго практически не влияют на первый. Когда же длины нитей сравнимы между собой, первый маятник начинает раскачиваться, причем раскачивается он то сильно, то слабо, потом снова сильно и снова слабо и так далее. Почему?

Очевидно, для передачи энергии от второго маятника к первому необходимо, чтобы толчки от пружинки происходили в такт с качаниями первого маятника. Это осуществляется при равенстве длин нитей маятников. В таком случае говорят, что наступил *резонанс*.

Обратите внимание на то, что амплитуда колебаний тяжелого маятника почти не меняется. Значит, он передает легкому маятнику лишь небольшую часть своей энергии.

Поменяйте маятники местами, то есть первоначально раскачайте легкий маятник. Вы убедитесь, что резонанс будет выражен гораздо слабее (чем легче маятник, тем быстрее затухают его колебания!). Проверьте это еще раз, воспользовавшись маятником с грузиком массой 20 г.

Наконец, подвесьте на одинаковых нитях одинаковые по массе грузики и раскачайте один из них. Вы увидите, что в этом случае оба маятника будут попеременно раскачиваться то сильно, то слабо, пока совсем не затухнут. Причем, если один сейчас колеблется с большой амплитудой, то второй — с малой, и наоборот. Колебания как бы перетекают от первого грузика ко второму и обратно.

Оказывается, все дело в наложении колебаний. Маятники соединены слабой пружинкой, колебания которой передают энергию от одного маятника к другому и как бы регулируют эту передачу. Наложение таких двух колебаний называют *биениями*.

Интересно, что математические уравнения, которые описывают биения (и с которыми вы познакомитесь во второй части статьи), недавно пригодились в ... нейтринной физике. Советский ученый академик Б. М. Понтекорво предположил, что один сорт нейтрино (аналог первого маятника) может переходить в другой сорт (второй маятник), если в природе есть слабое взаимодействие (пружинка), связывающее эти сорта. И вот может оказаться, что нейтрино, летящие на Землю от Солнца, по дороге все время меняют свою природу. Происходит то же, что и с маятниками. Сейчас ученые во всем мире ставят эксперименты, чтобы выяснить, существуют ли осцилляции Понтекорво — процесс перехода одного сорта нейтрино в другой.

3. Этот опыт потребует некоторого терпения.

Изготовьте пять—шесть одинаковых маятников и свяжите их одинаковыми пружинками (рис. 3). Приведите в движение первый маятник, и вы увидите, как постепенно колебания будут передаваться остальным маятникам — по цепочке маятников побежит волна.

Такая система — простейшая модель одномерной кристаллической решетки. На ней можно, например, наглядно проиллюстрировать поведение кристаллической решетки, когда в каком-то месте решетки возникают колебания.

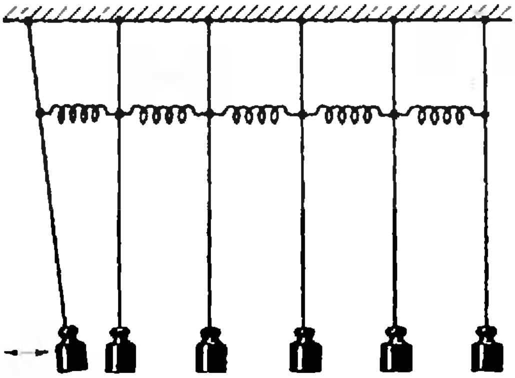


Рис. 3.

Расчеты и объяснения

Попробуем описать поведение связанных маятников с помощью математики.

Напомним, что уравнение движения математического маятника получается из второго закона Ньютона

$$ma_\tau = -mg \sin \varphi,$$

где m — масса маятника, a_τ — проекция ускорения на направление касательной к траектории маятника, $mg \sin \varphi$ — проекция силы тяжести на то же направление, φ — угол отклонения нити от вертикали. При малых углах $\sin \varphi \approx \varphi = \frac{s}{l}$ (s — смещение маятника, измеряемое длиной дуги, l — длина нити), поэтому уравнение движения принимает вид

$$ma_\tau l = -mgs. \qquad (1)$$

Из курса математики известно, что ускорение — это вторая производная смещения от времени: $a_\tau = s''$, так что уравнение (1) можно записать в виде

$$s'' + \omega^2 s = 0, \qquad (2)$$

где $\omega^2 = g/l$. Решением уравнения (2) является функция

$$s = s_м \cos \omega t.$$

Здесь $\omega = \sqrt{g/l}$ — круговая частота колебаний маятника. (Теперь понятно, откуда получается формула для периода колебаний математического маятника: $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.)

Для того чтобы учесть влияние пружинки, соединяющей два маятника, удобно уравнение (1) представить так:

$$mls'' = -mg\varphi l. \qquad (3)$$

В правой части этого уравнения записан момент тангенциальной составляющей силы тяжести относительно оси вращения, проходящей через точку подвеса маятника. В таком виде уравнение носит более общий характер, так как позволяет учитывать силы, действующие не только на грузик, но и на нить.

Рассмотрим связанные маятники одинаковой массы m, скрепленные пружинкой жесткостью k (рис. 4). Пусть в некоторый момент времени нити маятников составляют с вертикалью малые углы φ_1 и φ_2, а смещения маятников от положения равновесия равны s_1 и s_2 соответственно. Растяжение пружины в этот момент равно

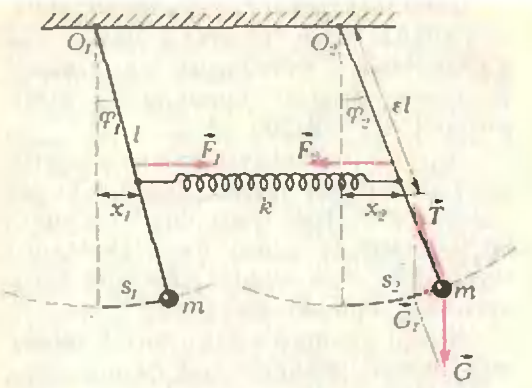


Рис. 4.

$$\Delta x = x_2 - x_1 = \varepsilon l \sin \varphi_2 - \varepsilon l \sin \varphi_1 \approx$$
$$\approx \varepsilon l (\varphi_2 - \varphi_1) \approx \varepsilon (s_2 - s_1).$$

Со стороны пружины на нити маятников действуют силы упругости $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ такие, что

$$|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = k\Delta x = k\varepsilon(s_2 - s_1).$$

Относительно осей, проходящих через точки подвеса O_1 и O_2, эти силы создают вращательные моменты, противоположные по знаку, но одинаковые по абсолютной величине:

$$|M| = k\varepsilon(s_2 - s_1) \cdot \varepsilon l = k\varepsilon^2 l(s_2 - s_1).$$

Добавим эти моменты (с учетом соответствующих знаков) в правую часть уравнения (3), записанного для каждого маятника. После сокращения на ml получим систему

$$\begin{cases} s_1'' = -\frac{g}{l} s_1 + \frac{k\varepsilon^2}{m}(s_2 - s_1) \\ s_2'' = -\frac{g}{l} s_2 - \frac{k\varepsilon^2}{m}(s_2 - s_1). \end{cases} \qquad (4)$$

Теперь заменим эту систему другой, в которой первое уравнение будет суммой, а второе — разностью уравнений системы (4). Кроме того, учтем, что $s_1'' \pm s_2'' = (s_1 \pm s_2)''$, а потому введем обозначения: $s_1 + s_2 = s_+$ и $s_1 - s_2 = s_-$. В результате получим

$$\begin{cases} s_+'' + \frac{g}{l} s_+ = 0 \\ s_-'' + \left(\frac{g}{l} + \frac{2k\varepsilon^2}{m}\right) s_- = 0. \end{cases} \qquad (5)$$

Каждое из уравнений данной системы имеет вид уравнения (2), решение которого известно:

$$s_+ = s_{+\text{м}} \cos \omega_+ t,$$
$$s_- = s_{-\text{м}} \cos \omega_- t.$$

Здесь $\omega_+ = \sqrt{\frac{g}{l}}$ — круговая частота колебаний одного маятника, а $\omega_- = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2k\varepsilon^2}{m}}$ — частота, несколько бóльшая частоты одиночного маятника.

Снова вернемся к переменным s_1 и s_2, для чего почленно сложим и вычтем предыдущие равенства. В результате получим уравнения колебаний каждого из маятников:

$$s_1 = \frac{1}{2}(s_{1\text{м}} + s_{2\text{м}}) \cos \omega_+ t + \frac{1}{2}(s_{1\text{м}} - s_{2\text{м}}) \cos \omega_- t,$$
$$s_2 = \frac{1}{2}(s_{1\text{м}} + s_{2\text{м}}) \cos \omega_+ t - \frac{1}{2}(s_{1\text{м}} - s_{2\text{м}}) \cos \omega_- t.$$

Проанализируем эти уравнения. Если начальные смещения обоих маятников одинаковы: $s_{1\text{м}} = s_{2\text{м}} = s_\text{м}$, то маятники будут колебаться с постоянной амплитудой и частотой $\omega_+ = \omega = \sqrt{g/l}$:

$$s_1 = s_2 = s_\text{м} \cos \omega t.$$

Если вначале маятники отклонены в противоположные стороны, так что $s_{1\text{м}} = -s_{2\text{м}} = s_\text{м}$, то маятники будут колебаться тоже с неизменной амплитудой, но с чуть большей частотой $\omega_- = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2k\varepsilon^2}{m}}$:

$$s_1 = s_\text{м} \cos \omega_- t,$$
$$s_2 = -s_\text{м} \cos \omega_- t.$$

Если же в начальный момент сместить из положения равновесия только один маятник, например первый: $s_{1\text{м}} = s_\text{м}$ и $s_{2\text{м}} = 0$, то получим

$$s_1 = \frac{1}{2} s_\text{м} (\cos \omega_+ t + \cos \omega_- t),$$
$$s_2 = \frac{1}{2} s_\text{м} (\cos \omega_+ t - \cos \omega_- t).$$

Используя тригонометрические тождества

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\beta-\alpha}{2},$$
$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\beta-\alpha}{2},$$

получим окончательные уравнения колебаний маятников:

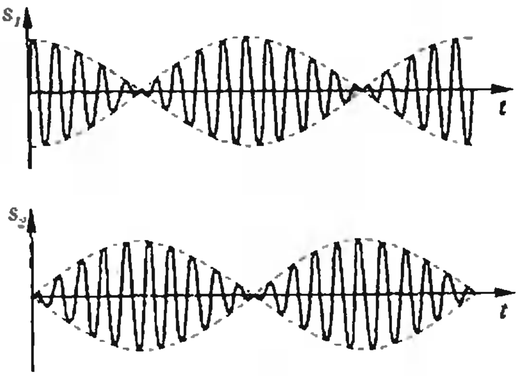


Рис. 5.

$$s_1 = s_\text{м} \cos \frac{\omega_- - \omega_+}{2} t \cos \frac{\omega_+ + \omega_-}{2} t,$$
$$s_2 = s_\text{м} \sin \frac{\omega_- - \omega_+}{2} t \sin \frac{\omega_+ + \omega_-}{2} t.$$

Соответствующие графики приведены на рисунке 5.

Заметим, что разность частот $\omega_- - \omega_+$ существенно меньше их суммы $\omega_+ + \omega_-$, поэтому функции

$\cos \frac{\omega_- - \omega_+}{2} t$ и $\sin \frac{\omega_- - \omega_+}{2} t$ меняются со временем гораздо медленнее, чем функции $\cos \frac{\omega_+ + \omega_-}{2} t$ и $\sin \frac{\omega_+ + \omega_-}{2} t$.

Вследствие этого можно считать, что колебания связанных маятников происходят по гармоническому закону, но амплитуды колебаний не постоянны, а медленно изменяются с течением времени по законам $s_\text{м} \cos \frac{\omega_- - \omega_+}{2} t$ и $s_\text{м} \sin \frac{\omega_- - \omega_+}{2} t$. (На рисунке 5 пунктиром показаны графики изменения амплитуды со временем.)

Это — те самые биения, которые вы наблюдали во втором опыте (с одинаковыми маятниками). В начальный момент $t = 0$ амплитуда второго маятника равна нулю, затем она растет, достигая наибольшего значения $s_\text{м}$ в момент времени, определяемый соотношением $\frac{\omega_- - \omega_+}{2} t = \frac{\pi}{2}$. В этот же момент амплитуда первого маятника, которая в начальный момент была максимальной,

(Окончание см. на с. 37)

И. Шарыгин, А. Ягубьянц

Окружность девяти точек и прямая Эйлера

Самый простой из многоугольников — треугольник — издавна привлекает внимание геометров. После Евклида красивые теоремы доказывали о нем такие замечательные ученые древности, как Аполлоний, Герон, Менелай и Птолемей. Ближе к нашему времени треугольником увлекались Эйлер, Понселе, Симсон, Дезарг, Клейн, Адамар.

В наши дни треугольник немного вышел из моды, но не утратил своей былой красоты. В этом вы сможете убедиться, прочитав про связанные с треугольником окружность и прямую, носящие имя Леонарда Эйлера. А рассмотренные затем задачи, мы надеемся, покажут, что вокруг треугольника еще есть, над чем подумать.

Окружность Эйлера

Начнем со следующей замечательной теоремы, опубликованной Эйлером в 1765 году:

Основания высот, основания медиан и точки, расположенные на серединах отрезков от ортоцентра[*] *до вершин треугольника, лежат на одной окружности.*

Окружность эта получила название *окружности девяти точек* или *окружности Эйлера* (рис. 1).

Прежде чем приступить к доказательству этой теоремы, обратим внимание на несколько простых, но полезных фактов, связанных с геометрией треугольника (рекомендуем доказать их самостоятельно).

Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника ABC, M — точка пересечения его медиан (остальные обозначения см. на рисунке 1).

(1) *Точки A_3, B_3, C_3 являются центрами окружностей, описанных, соответственно, около треугольников AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C.* (Указание. AH, BH, CH — диаметры этих окружностей — см. рис. 2).

(2) *Треугольники AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C подобны между собой и подобны исходному треугольнику ABC.* (Указание. Соответственные вершины обозначены одинаковыми буквами; $\widehat{ABC}=\widehat{AHC_1}=\widehat{AB_1C_1}$.)

(3) *Пусть A, B и C — величины соответствующих углов треугольника ABC. Если эти углы — острые, то величины углов треугольника $A_1B_1C_1$ равны, соответственно,* $180°-2A$, $180°-2B$, $180°-2C$; *если же, например, $A>90°$, то они равны* $2A-180°$, $2B$, $2C$ (рис. 2).

(4) *Расстояние от точки O до каждой стороны треугольника вдвое меньше, чем расстояние от противоположной вершины до ортоцентра*

$$|A_2O|=\frac{1}{2}|AH|, \quad |B_2O|=\frac{1}{2}|BH|,$$

$$|C_2O|=\frac{1}{2}|CH|.$$

(Указание: Рассмотрите треугольник, стороны которого проходят через точки A, B, C параллельно BC, AC, AB соответственно.)

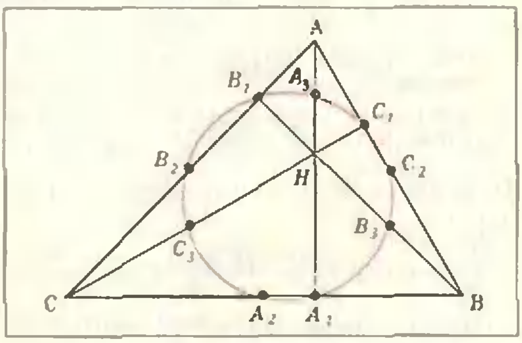


Рис. 1.

---

[*] *Ортоцентр* — точка пересечения высот.

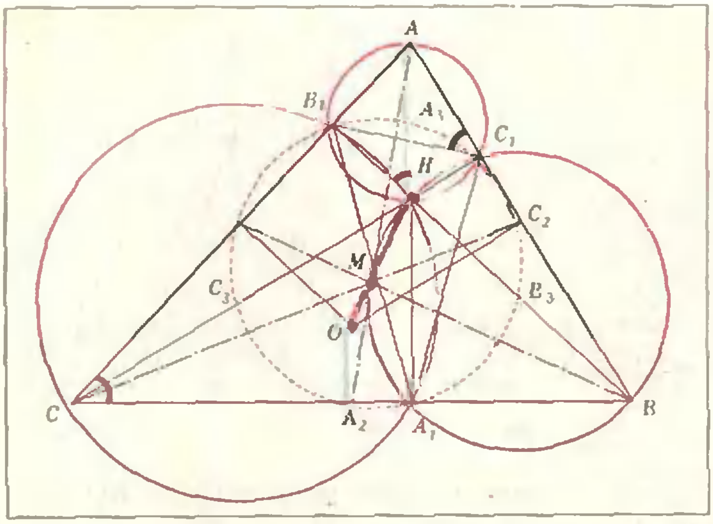


Рис. 2.

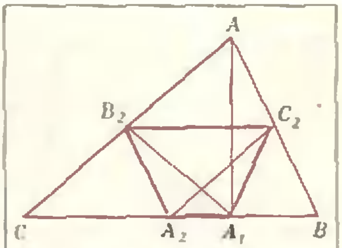


Рис. 3.

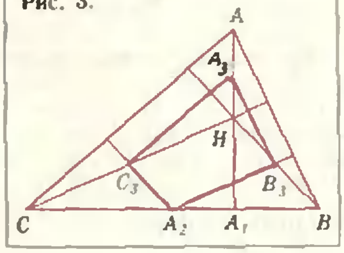


Рис. 4.

Прямая Эйлера

Заметим, что из утверждения (4) сразу следует, что точки O, M и H лежат на одной прямой, поскольку прямая OH делит медиану AA_2 в том же отношении, что и точка M. Эта прямая носит название *прямой Эйлера* треугольника ABC. Легко видеть, что $|OM| = \frac{1}{2}|MH|$.

Докажем теперь, что точки A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3 лежат на одной окружности. Ограничимся рассмотрением случая остроугольного треугольника ABC. (Для тупоугольного треугольника проведите рассуждения самостоятельно.)

Сначала заметим, что точки A_1, A_2, B_2, C_2 лежат на одной окружности (рис. 3), поскольку B_2A_1 и C_2A_1 — медианы прямоугольных треугольников AA_1C и AA_1B, проведенные на гипотенузы, и, следовательно, $B_2\widehat{A}_1C_2 = B_2\widehat{A}_1A + A\widehat{A}_1C_2 = A_1\widehat{A}B_2 + A_1\widehat{A}C_2 = \widehat{A} = B_2\widehat{A}_2C_2$. Абсолютно аналогично доказывается, что точки B_1, A_2, B_2, C_2 лежат на одной окружности (точка B_1 — точка «того же сорта», что и A_1!) и что точки C_1, A_2, B_2, C_2 лежат на одной окружности. Таким образом, шесть точек A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2 лежат на одной окружности. С другой стороны, если мы рассмотрим, например, четырехугольник $A_3B_3A_2C_3$ (рис. 4) и выразим какие-то два его противоположных угла через углы A, B и C (что нетрудно сделать), мы убедимся, что их сумма равна 180°; отсюда следует, что четырехугольник $A_3B_3A_2C_3$ — вписанный. Таким образом, шесть точек A_3, B_3, C_3, A_2, B_2, C_2 также лежат на одной окружности. Значит, все девять точек A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3 лежат на одной окружности (точки A_2, B_2, C_2 входят в обе шестерки). Теорема Эйлера доказана.

Свойства прямой и окружности Эйлера

(5) *Радиус окружности девяти точек равен половине радиуса окружности, описанной около* $\triangle ABC$.

(6) *Окружность девяти точек гомотетична окружности, описанной около треугольника* ABC, *с коэффициентом* $\frac{1}{2}$ *и центром гомотетии в точке* H (именно так расположены по отношению друг к другу треугольники ABC и $A_3B_3C_3$).

(7) *Эти же окружности гомотетичны, но уже с коэффициентом* $\left(-\frac{1}{2}\right)$ *и центром гомотетии в точке* M (так расположены по отношению друг к другу треугольники ABC и $A_2B_2C_2$).

(8) *Центр окружности девяти точек лежит на прямой Эйлера в середине отрезка* OH.

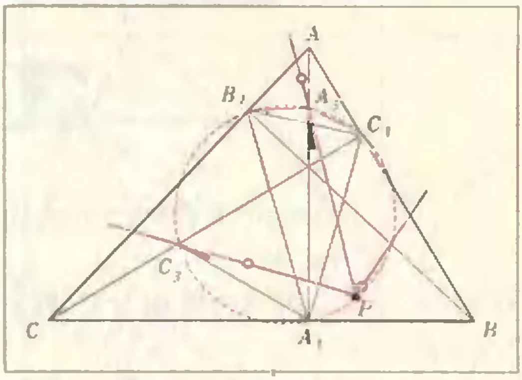


Рис. 5.

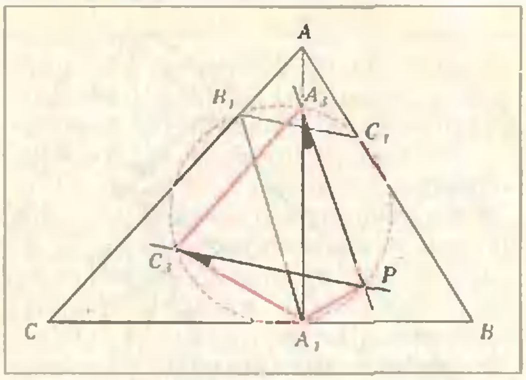


Рис. 6.

Трудная задача

На тему окружности девяти точек и прямой Эйлера составлено много интересных задач. Вот одна из них, опубликованная в книге «Избранные задачи из журнала American Mathematical Monthly» (М., «Мир», 1977):

Дан треугольник ABC; AA_1, BB_1, CC_1 — его высоты. Доказать, что прямые Эйлера треугольников AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C пересекаются в такой точке P окружности девяти точек треугольника ABC, для которой один из отрезков PA_1, PB_1, PC_1 равен сумме двух других отрезков (рис. 5).

Пусть, как и прежде, H — ортоцентр треугольника ABC, A_3, B_3, C_3 — середины отрезков AH, BH, CH (они, напомним, являются центрами окружностей, описанных около подобных треугольников AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C).

Докажем сначала вспомогательное утверждение. *Если через точки A_3, B_3, C_3 провести прямые, одинаково расположенные*[1] *по отношению к треугольникам AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C, то такие прямые пересекутся на окружности девяти точек треугольника ABC.* Обозначим через P точку пересечения каких-нибудь двух из этих прямых — например, прямых, проведенных через A_3 и C_3 (рис. 6). Так как прямые A_3P и C_3P одинаково расположены относительно треугольников AB_1C_1 и A_1B_1C, $A_1A_3P=A_1C_3P$. Значит, окружность, проходящая через точки P_1, A_1, C_3, пройдет через точку A_3. Но тогда эта окружность — окружность девяти точек треугольника ABC. Таким образом, любые две из проведенных прямых пересекаются на окружности девяти точек треугольника ABC, отсюда легко заключить, что все три прямые пересекаются в одной точке.

Для завершения доказательства предположим теперь, что P — точка пересечения прямых Эйлера. Легко видеть (проверьте!), что числа $|PA_1|$, $|PB_1|$, $|PC_1|$ пропорциональны синусам углов PA_3A_1, PA_3B_1, PA_3C_1. Положим $P\hat{A}_3A_1=\varphi$.

Предположим, что $\triangle ABC$ — остроугольный. Пользуясь свойством (3) и рисунком 5, найдем

$$P\hat{A}_3B_1=\varphi+A_1\hat{A}_3B_1=\varphi+A_1\hat{C}_1B_1=$$
$$=\varphi+180°-2C,$$

$$P\hat{A}_3C_1=A_1\hat{A}_3C_1-\varphi=A_1\hat{B}_1C_1-\varphi=$$
$$=180°-2B-\varphi.$$

Таким образом, нам нужно доказать, что одно из трех чисел

$$\sin\varphi,\ \sin(2C-\varphi),\ \sin(2B+\varphi)$$

(в данном случае — второе) является суммой двух других.

Рассмотрим треугольник AOH (рис. 7). Поскольку $\triangle ABC\sim\triangle AB_1C_1$ и точки O, A_3 являются центрами описанных около этих треугольников окружностей, $A\hat{O}H=\varphi$ и $O\hat{A}C=$ $=H\hat{A}B=90°-B$. Значит,

$$O\hat{A}H=A-O\hat{A}C-A_1\hat{A}B=$$
$$=A-(90°-B)-(90°-B)=2B+A-180°,$$

откуда $\sin O\hat{H}A=\sin(360°-2B-A-\varphi)=$ $=-\sin(2B+A+\varphi)$.

Если R — радиус окружности, описанной около $\triangle ABC$, то $|OA|=R$; в силу свойства (4) и равенства $A_2\hat{O}B=\frac{1}{2}\,C\hat{O}B=A$

$$|AH|=2|OA_2|=2R\cos A.$$

По теореме синусов для треугольника OAH получаем

$$\frac{R}{-\sin(2B+A+\varphi)}=\frac{2R\cos A}{\sin\varphi},$$
$$-\sin\varphi=2\cos A\sin(2B+A+\varphi),$$
$$-\sin\varphi=\sin(2A+2B+\varphi)+\sin(2B+\varphi),$$
$$-\sin\varphi=-\sin(2C-\varphi)+\sin(2B+\varphi),$$
$$\sin(2C-\varphi)=\sin\varphi+\sin(2B+\varphi).$$

Попробуйте самостоятельно проделать доказательство в случае, когда треугольник ABC — тупоугольный.

В заключение приведем без доказательства еще один замечательный факт, связанный с окружностью девяти точек:

Теорема Фейербаха. *Окружность девяти точек касается впи-*

---

[1] То есть образующие с соответствующими сторонами одинаковые углы.

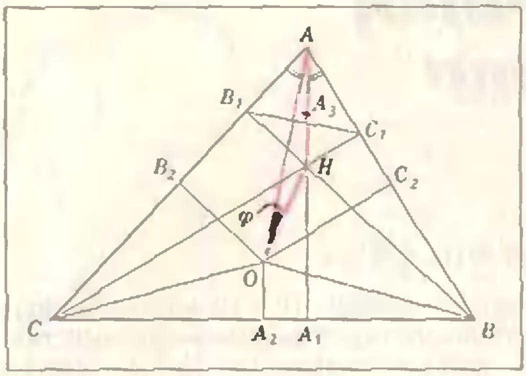


Рис. 7.

санной и трех вневписанных окружностей) данного треугольника.*

Все известные нам доказательства этого утверждения весьма громоздки и носят, по существу, чисто вычислительный характер. Возможно, вам удастся найти хорошее геометрическое доказательство теоремы Фейербаха.

Желающим поближе ознакомиться с геометрией треугольника мы рекомендуем две книги:

С. И. Зетель «Новая геометрия треугольника» (М., «Учпедгиз», 1962).

С. М. Коксетер, С. Л. Грейтцер «Новые встречи с геометрией» (М., «Мир», 1978).

Упражнения

1. Пусть H — отроцентр треугольника ABC. Докажите, что треугольники ABC, ABH, BCH, CAH имеют одну и ту же окружность девяти точек.

2. Пусть K — середина какой-либо стороны треугольника, H — ортоцентр, L — точка пересечения прямой HK с окружностью, описанной около треугольника (K между H и L). Докажите, что $|HK| = |KL|$.

3. Пусть P — основание высоты треугольника, M — точка пересечения медиан, N — точка пересечения прямой MP с описанной окружностью (M между P и N). Докажите, что $2|PM| = |MN|$.

4. Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из произвольной точки описанной окружности на стороны треугольника, лежат на одной прямой. Эта прямая называется *прямой Симсона*. Докажите, что прямые Симсона, соответствующие концам диаметра, взаимно перпендикулярны, а их точка пересечения лежит на окружности девяти точек.

5. Внутри треугольника ABC дана точка M. Докажите, что прямые Эйлера треугольников AMB, BMC и CMA пересекаются в одной точке, если

а) M — ортоцентр треугольника ABC.

б) M — точка, из которой все стороны треугольника видны под углом 120° (все углы треугольника меньше 120°).

6. Пусть L — такая точка в плоскости треугольника ABC, что $|AL|:|BL|:|CL| = |BC|:|CA|:|AB|$. Докажите, что L лежит на прямой Эйлера треугольника ABC.

---

*) *Вневписанная окружность* — это окружность, касающаяся одной стороны треугольника и продолжений двух других его сторон.

Колебания и маятники

(Начало см. на с. 30)

становится равной нулю. Это означает, что произошла полная передача энергии от первого маятника ко второму. Затем процесс пойдет в обратном направлении.

Гораздо труднее математически описать колебания связанных маятников с разными массами, но одинаковыми длинами нитей (при желании попробуйте сделать это самостоятельно). Заметим только, что в этом случае амплитуда первоначально отклоненного маятника в нуль не обращается — энергия хотя и передается другому маятнику, но не полностью. Это вы тоже наблюдали на опыте.

Если же длины маятников не одинаковы ($l_1 \neq l_2$), то, как вы видели на опыте, резонанса не будет. В математическом описании это скажется в том, что станет невозможным переход от системы (4) к системе (5).

В заключение советуем вам самостоятельно исследовать вопрос о зависимости колебаний связанных маятников от жесткости пружинки, от положения места ее крепления к нитям и от масс маятников. Попробуйте, например, решить задачу для случая, когда масса одного маятника гораздо больше массы другого, и сравните полученный результат с опытом (для этого один из маятников прикрепите пружинкой к стене).

задачник кванта

Задачи

М696—М700; Ф708—Ф712

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 октября 1981 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка 21/16, редакция журнала «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 8—81» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М696, М697» или «Ф708». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи.

Задачи Ф708 — Ф711 предлагались на заключительном туре Всесоюзной олимпиады школьников по физике. Число в скобках обозначает класс, в котором предлагалась задача.

М696. Можно ли таблицу 10×10 клеток заполнить 100 различными натуральными числами так, чтобы для любого квадрата $k\times k$ клеток ($2\leqslant k\leqslant 10$) а) суммы, б) произведения k чисел на его диагоналях были одинаковы?

А. Балинский

М697. Назовем *пузатостью* прямоугольника отношение его меньшей стороны к большей (пузатость квадрата равна 1). Докажите, что, как бы ни разрезать квадрат на прямоугольники, сумма их пузатостей будет не меньше 1.

С. Фомин

М698. На сторонах a, b, c, d вписанного в окружность четырехугольника «наружу» построены прямоугольники размерами $a\times c$, $b\times d$, $c\times a$, $d\times b$. Докажите, что центры этих прямоугольников являются вершинами а) параллелограмма, б) прямоугольника.

О. Пенкин

М699*. Полукруг с диаметром AB разрезан отрезком CD, перпендикулярным AB, на два криволинейных треугольника ACD и BCD, в которые вписаны окружности, касающиеся AB в точках E и F (рис. 1). Докажите, что а) $|AD|=|AF|$, б) $[DF]$ — биссектриса угла BDC, в) величина угла EDF не зависит от выбора точки C на AB.

В. Сендеров

М700*. Можно ли множество всех конечных десятичных дробей разбить на а) два, б) три класса так, чтобы в один класс не попали два числа с разностью 10^m (ни при каком целом $m=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$)?

А. Лейдерман

Ф708. Для исследования свойств нелинейного резистора был произведен ряд экспериментов. Вначале была исследована зависимость сопротивления резистора от температуры. При повышении температуры до значения $t_1=100°$ С мгновенно происходил скачок сопротивления от величины $R_1=50$ Ом до величины $R_2=100$ Ом; при охлаж-

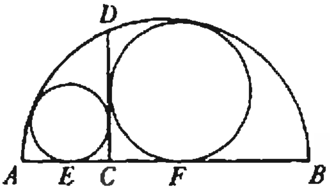


Рис. 1.

Рис. 2.

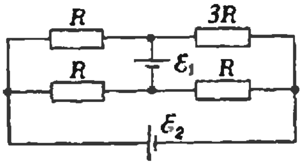


Рис. 3.

дении обратный скачок происходил при температуре $t_2=99°$ С (рис. 2).

Во втором опыте к резистору приложили постоянное напряжение $U_1=60$ В, при котором его температура оказалась равной $t_3=80°$ С.

Наконец, когда к резистору приложили постоянное напряжение $U_2=80$ В, в цепи возникли самопроизвольные колебания тока. Определите период этих колебаний, а также максимальное значение тока. Температура воздуха в лаборатории постоянная и равна $t_0=20°$ С. Теплоотдача от резистора пропорциональна разности температур резистора и окружающего воздуха. Теплоемкость резистора $c=3$ Дж/К. (9)

А. Буздин

Ф709. Собрана схема, показанная на рисунке 3. ЭДС батареи $\mathscr{E}_1$ уменьшили на 1,5 В, после чего токи на различных участках цепи изменились. Как нужно изменить ЭДС батареи $\mathscr{E}_2$, чтобы

1) ток через батарею $\mathscr{E}_1$ стал прежним?
2) ток через батарею $\mathscr{E}_2$ стал прежним?

Внутренними сопротивлениями батарей пренебречь.

А. Зильберман

Ф710. При наблюдении в облаке за падением капли, которая увеличивается в размерах, поглощая мельчайшие капельки, встречающиеся на ее пути, было установлено, что капля движется все время с постоянным ускорением. Определите это ускорение, считая начальный размер капли малым. Сопротивлением воздуха при движении капли пренебречь.

А. Стасенко

Ф711. В таблице приведены экспериментальные данные о теплоемкостях и молярных массах некоторых твердых тел. На основании этих данных установить некоторую физическую закономерность и заполнить три пустые клеточки таблицы. Какова предполагаемая точность ваших предсказаний (в процентах)? Универсальная газовая постоянная $R=8{,}31$ Дж/(моль · К). (9)

Е. Сурков

Таблица

	Серебро	Алюминий	Золото	Висмут	Кобальт	Медь	Железо	Литий	Магний	Никель	Платина	Титан	Ванадий
c, Дж/(г · К)	0,238	0,90	0,128	0,122	0,417	0,383	0,447	3,52		0,43	0,131		0,484
A, г/моль	107	27	197	209	59	64		7	24	60	196	48	51

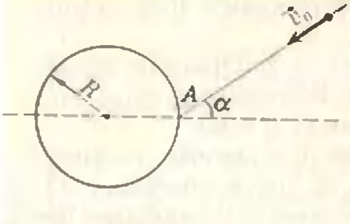


Рис. 4.

Ф712. Небольшой шарик движется с постоянной скоростью $\vec{V}_0$ по гладкой горизонтальной поверхности и попадает в точке A в цилиндрический вертикальный колодец глубины H и радиуса R. Вектор скорости шарика составляет угол α с диаметром колодца, проведенным в точку A (рис. 4). При каком соотношении между $\vec{V}_0$, H, R и α шарик после упругих соударений со стенками и дном сможет «выбраться» из колодца? (8)

С. Кротов

Решения задач

М656—М660; Ф668—Ф672

М656. *В пространстве имеются 30 ненулевых векторов. Докажите, что среди них найдутся два, угол между которыми меньше 45°.*

Поместим начала всех векторов в одну точку и построим сферу радиуса 1 с центром в этой точке. Возьмем точки пересечения наших векторов (или их продолжений) с построенной сферой и окружим каждую из них шапочкой «диаметром» 45° (рис. 1) или, что по существу то же самое, сами векторы — конусами с раствором 45° (и образующей 1). Утверждение задачи будет доказано, если мы покажем, что какие-то две из этих «окрестностей»: шапочки или конусы — пересекаются. А для этого сравним суммарную площадь поверхностей шапочек (или суммарный объем конусов) с площадью поверхности сферы (соответственно, с объемом шара).

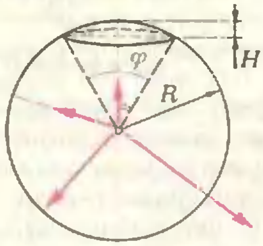


Рис. 1.

Площадь поверхности шапочки (см. рисунок 1; $H=R(1-\cos\varphi)$ — высота шапочки) равна $2\pi RH=2\pi\left(1-\cos\frac{\pi}{8}\right)=2\pi\left(1-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)$ (мы воспользовались формулой для косинуса половинного угла). Наша цель — доказать, что $30\cdot2\pi\left(1-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)>4\pi$, то есть, что $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}<\frac{4}{15}$. Произведя несколько несложных преобразований (два из которых — возведение в квадрат), придем к верному равносильному неравенству $\frac{1}{2}<\left(\frac{167}{225}\right)^2$. Из этого следует, что среди шапочек найдутся две пересекающиеся; угол между соответствующими им векторами будет меньше 45°.

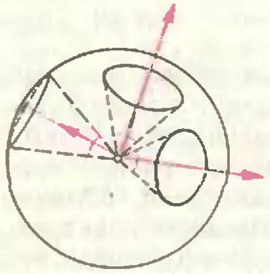


Рис. 2.

Если сравнивать объемы (рис. 2), нужно доказать, что объем каждого конуса больше $\frac{4}{90}\pi$. Предлагаем вам убедиться в этом самостоятельно.

А. Толпыго

◆

М657. *В таблице $n\times n$, заполненной числами, все строки различны. Докажите, что из таблицы можно вычеркнуть некоторый столбец так, что в оставшейся таблице все строки также будут различны.*

Допустим противное: *какой бы столбец мы ни вычеркнули, в оставшейся таблице найдется хотя бы одна пара одинаковых строк.* Рассмотрим n «укороченных» таблиц, получающихся из данной, соответственно, вычеркиванием первого, второго, ..., n-го столбца. Отметим для каждой из этих таблиц одну пару одинаковых строк (длины $n-1$). Будем теперь считать, что строки исходной таблицы — это точки на плоскости, причем точки, соответствующие отмеченным парам строк в укороченных таблицах, попарно соединены. Мы получили картинку «n точек — n отрезков». Нетрудно доказать, что в такой картинке найдется *цикл* — замкнутая ломаная с вершинами в некоторых из наших точек. Пусть эти вершины соответствуют строкам A_1, A_2, ..., A_m, и пусть отрезок A_iA_{i+1} получается в результате вычеркивания столбца B_i ($i=1, 2, \ldots, m-1$), а отрезок A_mA_1 — столбца B_m. Тогда в исходной таблице строки A_1 и A_2 отличаются только в столбце B_1, строки A_2 и A_3 — только в столбце B_2, ..., строки A_{m-1} и A_m — только в столбце B_{m-1}, так что в столбце B_m во всех этих строках записано одно и то же число. Но это противоречит тому, что точки, соответствующие строкам A_1 и A_m, соединены (поскольку, по условию, все строки в исходной таблице различны, строки A_1 и A_m должны отличаться в столбце B_m).

А. Анджан

M658. *В квадрате со стороной 1 проведено конечное число отрезков (рис. 1), параллельных его сторонам. Отрезки могут пересекать друг друга. Сумма длин проведенных отрезков равна 18. Докажите, что среди частей, на которые квадрат разбивается этими отрезками, найдется такая, площадь которой не меньше 0,01.*

◆

Сумма длин границ всех частей, на которые квадрат разбит отрезками, равна $2 \cdot 18+4=40$ (длины проведенных отрезков входят в эту сумму по два раза, длины сторон квадрата — по одному). Пусть для i-й части сумма длин горизонтальных границ равна $2x_i$, вертикальных — $2y_i$, а площадь i-й части равна c_i^2 ($c_i>0$); тогда $x_iy_i \geqslant c_i^2$ (рис. 2), поэтому $x_i+y_i \geqslant 2\sqrt{x_iy_i} \geqslant 2c_i$. Итак,

$$40=\Sigma(2x_i+2y_i) \geqslant 4\Sigma c_i,$$

откуда $\Sigma c_i \leqslant 10$ (здесь сумма Σ берется по всем частям разбиения).

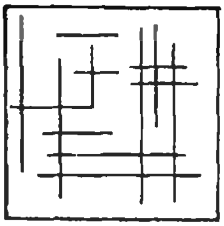


Рис. 1.

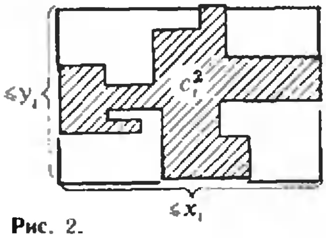


Рис. 2.

Если $c_i^2<0{,}01$ (то есть $c_i<0{,}1$) для всех i, то $1=\Sigma c_i^2<\Sigma 0{,}1c_i=0{,}1\Sigma c_i$, откуда $\Sigma c_i>10$. Противоречие. Очевидно, оценка 18 — точная: восемнадцатью отрезками длины 1 наш квадрат можно разбить на 100 одинаковых квадратиков площади 0,01 каждый.

А. Берзиньш

M659. *Докажите следующие свойства последовательности Фибоначчи $f_1=1$, $f_2=2$, ..., $f_{k+1}=f_k+f_{k-1}$.*

а) Каждое натуральное число $n \geqslant 3$ представляется в виде суммы различных чисел Фибоначчи.

б) Обозначим количество таких представлений числа n в виде суммы четного числа слагаемых через K_n, в виде суммы нечетного числа слагаемых — через H_n; тогда $|K_n-H_n| \leqslant 1$ при всех n.*

в) Если перемножить несколько подряд стоящих двучленов из последовательности*

$$1-x,\ 1-x^2,\ 1-x^3,$$
$$1-x^5,\ \ldots,\ 1-x^{f_k},\ \ldots$$

◆

Для краткости мы будем вместо «представление числа n в виде суммы различных чисел Фибоначчи» говорить «представление числа n»; представления, удовлетворяющие условию задачи г), мы будем называть *правильными*.

Утверждение задачи а) содержится в утверждении задачи г).

Решение задачи г). На полях приведена таблица правильных представлений натуральных чисел. Эта таблица устроена так. Ее строки разбиты на группы, содержащие, соответственно, 1, 2, ..., f_k, ... равенств. Первая группа состоит из равенства $1=1$, вторая — из равенств $2=2$ и $3=1+2$, а группа с номером $k \geqslant 3$ получается из $(k-2)$-й и $(k-1)$-й групп увеличением левой части входящих в них равенств на f_k и приписыванием к правой части слагаемого f_k. Из таблицы видно, что всякое натуральное число $n \geqslant 3$ обладает правильным представлением. Для доказательства единственности правильного представления предположим, что n — самое маленькое число, для которого оно не единственно; пусть

$$n=f_{i_1}+\ldots+f_{i_m} \quad (i_1<\ldots<i_m) \tag{1}$$

— представление, не содержащееся в нашей таблице. Но тогда *(в показателях стоят числа Фибоначчи), то в полученном многочлене все коэффициенты будут равны 0, —1 или +1. Известное нам доказательство утверждений б) и в) опирается на такое свойство:*

г) Для любого $n \geqslant 3$ существует единственное представление n в виде суммы различных чисел Фибоначчи, которое вместе с каждым слагаемым $f_k (k \geqslant 3)$ содержит хотя бы одно из двух предыдущих чисел Фибоначчи f_{k-1} или f_{k-2}.

[1=1

[2=2
3=1+2

[4=1+3
5=2+3
6=1+2+3

[7=2+5
8=1+2+5
9=1+3+5
10=2+3+5
11=1+2+3+5

[12=1+3+8
13=2+3+8
. . . .

$1=S(1)$
$2=T(1)$
$3=S(2)$
$4=S(1,1)$
$5=T(2)$
$6=S(3)$
$7=T(1,1)$
$8=S(2,1)$
$9=S(1,2)$
$10=T(3)$
$11=S(4)$
$12=S(1,1,1)$
$13=T(2,1)$
....
$37=S(2,2,1)$

$K_1—H_1=M(1)=-1$
$K_2—H_2=N(1)=-1$
$K_3—H_3=M(2)=0$
$K_4—H_4=M(1,1)=1$
$K_5—H_5=N(2)=0$
$K_6—H_6=M(3)=0$
$K_7—H_7=N(1,1)=1$
$K_8—H_8=M(2,1)=-1$
$K_9—H_9=M(1,2)=0$
$K_{10}—H_{10}=N(3)=0$
$K_{11}—H_{11}=M(4)=1$
$K_{12}—H_{12}=M(1,1,1)=0$
$K_{13}—H_{13}=N(2,1)=-1$
. . . .
$K_{37}—H_{37}=M(2,2,1)=0$

правильное представление

$$n-f_{i_m}=f_{i_1}+\ldots+f_{i_{m-1}}$$

тоже не может содержаться в таблице, иначе нам пришлось бы при образовании i_m-й группы включить в таблицу представление (1). Противоречие.

Решение задачи б). Представления натуральных чисел мы будем изображать в виде последовательностей черных и белых кружков: черный кружок на k-м месте означает, что f_k входит в представление, белый — что не входит (мы обрываем последовательность на последнем черном кружке). На рисунке 1 этим способом записаны шесть различных представлений числа 37 (это — все возможные его представления). Правильные представления приобретают при этом вид, показанный на рисунках 2, *а* или 2, *б*; здесь $j_1, \ldots, j_q$ — натуральные числа. В первом случае мы полагаем $n=S(j_1,\ldots,j_q)$, $K_n—H_n=M(j_1,\ldots,j_q)$; во втором случае мы полагаем $n=T(j_1,\ldots,j_q)$, $K_n—H_n=N(j_1,\ldots,j_q)$. (Так, $37=S(2, 2, 1)$, $M(2, 2, 1)=K_{37}—H_{37}=3—3=0$; другие примеры приведены рядом на полях.)

Если $n=f_{i_1}+\ldots+f_{i_m}$ — представление числа n, включающее в себя f_r и f_{r+1}, но не включающее f_{r+2}, то, заменив слагаемые f_r и f_{r+1} слагаемым f_{r+2}, мы получим другое представление числа n. Это преобразование (…●●○…→…○○●…) мы будем называть *элементарным упрощением*. Очевидно, всякое представление числа получается из правильного цепочкой элементарных упрощений. Пусть сначала $q=1$. На рисунке 3 изображен полный набор представлений числа $n=S(j)$ (кстати, равного $f_{j+2}—2$). Мы видим, что $K_{S(j)}$ есть число четных чисел на отрезке от $[(j+1)/2]$ до j, а $H_{S(j)}$ есть число нечетных чисел на этом отрезке. Следовательно,

$$K_n—H_n=M(j)=\begin{cases} 1, \text{ если } j\equiv 0 \mod 4^{*)}, \\ -1, \text{ если } j\equiv 1 \mod 4, \\ 0, \text{ если } j\equiv 2 \mod 4. \end{cases} \qquad (2)$$

Обратимся теперь к числу $M(j_1,\ldots,j_q)$. Разделим представления числа $S(j_1,\ldots,j_q)$ на две группы: представления вида $f_1+\ldots+f_{j_1}+\ldots$ и остальные. Число представлений первой группы совпадает с числом всех представлений числа $S(j_2,\ldots,j_q)$, только последние имеют на j_1 слагаемых меньше, поэтому вклад первой группы в $M(j_1,\ldots,j_q)$ равен $(-1)^{j_1}M(j_2,\ldots,j_q)$ (на полях приведено несколько числовых примеров, иллюстрирующих наше наблюдение).

Далее. Чтобы с помощью элементарных упрощений получить из правильного представления представление второй группы, необходимо сделать элементарное упрощение $(f_{j_1-1}, f_{j_1})\rightarrow f_{j_1+1}$, причем с него можно начать. В результате между первыми $j_1—2$ слагаемыми и остальными возникнет зазор длины 2 (рис. 4), исключающий возможность взаимодействия. Поэтому в дальнейшем элементарные упрощения первых $j_1—2$ слагаемых и остальных происходят независимо, так что вклад второй группы в $M(j_1,\ldots,j_q)$ равен $M(j_1—2)M(j_2+1, j_3,\ldots,j_q)$. Итак,

$$M(j_1,\ldots,j_q)=(-1)^{j_1}M(j_2,\ldots,j_q)+ \\ +M(j_1—2)M(j_2+1, j_3,\ldots,j_q) \qquad (3)$$

(см. также примеры на полях)**). Докажем теперь индукцией по q, что $M(j_1,\ldots,j_q)=-1$, 0 или 1.

При $q=1$ это мы уже знаем. Предположим, что $M(k_1,\ldots,k_r)=-1$, 0 или 1 при $r<q$ и любых $k_1,\ldots,k_r$. Если $j_1\equiv 0$ или 1 mod 4, то $M(j_1—2)=0$ (см. формулу (2)) и

$$M(j_1,\ldots,j_q)=(-1)^{j_1}M(j_2,\ldots,j_q)=-1, 0 \text{ или } 1.$$

Если $j_1\equiv 2$ или 3 mod 4, то $M(j_1—2)=(-1)^{j_1}$ (см. формулу (2)) при $q=2$ и

---

*) Запись $a\equiv b \mod c$ (читается: *а сравнимо с b по модулю с*), где $0<b<c$, означает, что при делении a на c получается остаток b.

**) Формула (3) имеет смысл только при $j_1\geqslant 3$, но ею можно пользоваться и при $j_1=1, 2$, положив $M(-1)=0$, $M(0)=1$ (что не противоречит и формуле (2)); доказательство оставляется читателю.

$M(1)=-1$
$M(2)=0$
$M(3)=0$
$M(4)=1$

$M(1,\ 1)=-M(1)=1$
$M(1,\ 2)=-M(2)=0$
$M(1,\ 3)=-M(3)=0$

$M(1,4)=-M(4)=-1$
$M(2,\ 1)=M(1)+M(2)=-1$
$M(2,\ 2)=M(2)+M(3)=0$
$M(2,\ 3)=M(3)+M(4)=1$

. . . .

$M(1,\ 1,\ 1)=-M(1,\ 1)=-1$
$M(1,\ 1,\ 2)=-M(1,\ 2)=0$

. . . .

$M(2,\ 1,\ 1)=M(-1)+$
$+M(0))\ M(2)=0$
$M(2,\ 1,\ 2)=(M(-1)+$
$+M(0))\ M(3)=0$
$M(2,\ 1,\ 3)=(M(-1)+$
$+M(0))\ M(4)=1$

. . . .

$M(2,\ 2,\ 1)=(M(0)+$
$+M(1))\ M(2)=0$

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^5)\times$$
$$\times(1-x^8)(1-x^{13})\ldots=$$
$$=1-x-x^2+x^4+$$
$$+x^7-x^8+x^{11}-x^{13}\ldots$$

$$(1-x^{f_3})(1-x^{f_4})(1-x^{f_5})\times$$
$$\times(1-x^{f_6})=(1-x^3)\times$$
$$\times(1-x^5)(1-x^8)(1-x^{13})=$$
$$=1-x^3-x^5+x^{11}+x^{18}-$$
$$-x^{24}-x^{26}+x^{29}$$

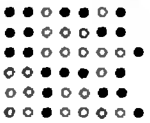

Представления числа 37

Рис. 1.

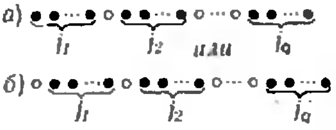


Рис. 2.

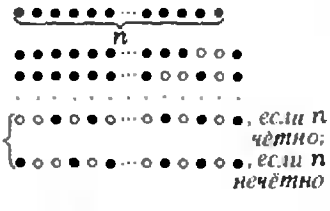


Рис. 3.

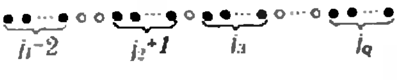


Рис. 4.

$$M(j_1,\ldots,j_q)=(-1)^{j_1}[M(j_2,\ldots,j_q)+M(j_2+1,\ j_3,\ldots,j_q)]=$$
$$=(-1)^{j_1}[(-1)^{j_2}M(j_3,\ldots,j_q)+(-1)^{j_2-1}M(j_3,\ldots,j_q)+$$
$$+M(j_2-2)M(j_3+1,\quad j_4,\ldots,j_q)+M(j_2-1)M(j_3+1,\quad j_4,\ldots,j_q)]=$$
$$=(-1)^{j_1}(M(j_2-2)+M(j_2-1))M(j_3+1,\ j_4,\ldots,j_q)$$

при $q\geqslant 3$. В обоих случаях мы получаем, что $M(j_1,\ldots,j_q)=0$, 1 или -1, поскольку, как видно из формулы (2), $M(j_2)+M(j_2+1)=0$, 1 или -1 и $M(j_2-2)+M(j_2-1)=0$, 1 или -1.

Точно так же можно показать, что $N(j_1,\ldots,j_q)=0$, 1 или -1. Более того, ясно, что отсутствие в правильном представлении слагаемого f_1 никакого воздействия на ход элементарных упрощений не окажет, так что в действительности $N(j_1,\ldots,j_q)=M(j_1,\ldots,j_q)$.

Решение задачи в) Эта задача близка к задаче б), и мы ограничимся несколькими замечаниями, которые позволят читателю без труда восстановить ее решение.

Коэффициент при x^n в произведении $(1-x^{f_l})(1-x^{f_{l+1}})\ldots$ $\ldots(1-x^{f_m})$ равен разности $K-H$, где K — число представлений числа n в виде суммы четного числа различных слагаемых из множества $\{f_l,\ f_{l+1},\ldots,\ f_m\}$, а H — число представлений числа n в виде суммы нечетного числа таких слагаемых (см. поля). *Другими словами*, K и H отличаются от прежних K_n и H_n тем, что запрещается брать числа Фибоначчи с номерами, меньшими, чем l, и большими, чем m, а наша задача по-прежнему заключается в том, чтобы показать, что $K-H=-1$, 0 или 1. Прежде всего нужно изменить определение правильного представления: оно должно включать в себя только слагаемые из нашего множества (разумеется, неравенство $k\geqslant 3$ в определении должно быть заменено неравенством $k\geqslant l+2$). Утверждение задачи г) ослабляется: теперь всякое число либо вовсе не имеет правильных представлений, либо имеет одно такое представление. По-прежнему всякое представление получается из правильного цепочкой элементарных упрощений (так что число, не имеющее правильных представлений, не имеет никаких представлений). Числа $S(j_1,\ldots,j_q)$ и $T(j_1,\ldots,j_q)$ определяются как в решении задачи б), только правильное представление числа $S(j_1,\ldots,j_q)$ начинается теперь со слагаемого f_l, а правильное представление числа $T(j_1,\ldots,j_q)$ — со слагаемого f_{l+1}. Определения чисел $M(j_1,\ldots,j_q)$ и $N(j_1,\ldots,j_q)$ и формула (3) не меняются. Некоторой аккуратности требует вычисление в новой обстановке чисел $M(j)$ (и $N(j)$), но читатель с этим вычислением наверняка справится.

Замечание. Читатели, познакомившиеся с помещенной в этом номере журнала статьей «О раскрытии скобок, об Эйлере, Гауссе, Макдональде и об упущенных возможностях», вероятно, обратили внимание на сходство, во всяком случае внешнее, между утверждением только что разобранной задачи и тождеством Эйлера. Это сходство явилось одной из главных причин интереса к задаче со стороны ее авторов.

Д. Фукс

От редакции. Другое решение задачи **М659** мы получили от нашего читателя *Люнаса Меркявичюса*. В его работе используются такие обозначения: через $K(n,\ k)$, соответственно $H(n,\ k)$, обозначается число представлений числа n в виде суммы четного, соответственно нечетного, числа различных слагаемых, выбираемых из множества $f_1,\ldots,f_k$; через $G(n,\ k)$ — разность $K(n,\ k)-H(n,\ k)$. После этого доказываются четыре формулы:

$$G(n,\ k)=0\ \text{при}\ n>f_{k+2}-2;$$
$$G(n,\ k)=(-1)^kG(f_{k+2}-2-n,\ k)\ \text{при}\ 0\leqslant n\leqslant f_{k+2}-2;$$
$$G(n,\ k)=G(n,\ k-1)\ \text{при}\ 0\leqslant n<f_k;$$
$$G(n,\ k)=-G(n-f_{k-1},\ k-3)\ \text{при}\ f_k\leqslant n<f_k+f_{k-2}.$$

(Первые три из этих формул почти очевидны, так что вся трудность заключена в доказательстве последней.) С помощью этих формул индукцией по k легко показать, что $G(n,\ k)=0$ или ± 1 (нужно только проверить это для $k=1$, 2, 3). После этого для решения задачи б) достаточно заметить, что

$M(n)=G(n, k)$ при $f_{k+1}>n$, а для решения задачи в) — что коэффициент при x^n в произведении $(1-x^{f_{l+1}})\dots(1-x^{f_{l+k}})$ равен 0, если n не представляется в виде суммы различных слагаемых, выбираемых из множества $f_{l+1},\dots,f_{l+k}$, и равен $G(f_{j_1}+f_{j_2}+\dots+f_{j_s}, k)$, если $n=f_{l+j_1}+\dots+f_{l+j_s}$, $1<j_1<\dots<j_s<k$.

◆

М660. *На окружности расставляются синие и красные точки (рис. 1, а). Разрешается добавить новую красную точку и одновременно поменять цвет у каждой из двух соседних с ней точек (рис. 1, б), либо убрать красную точку и поменять цвет у каждой из соседних точек (рис. 1, в). Пусть первоначально было всего две красные точки (меньше двух точек оставлять не разрешается). Можно ли несколькими такими операциями получить на окружности*

а) две точки — синюю и красную;

б) 8 красных точек;

в) одну красную и 6 синих точек;

г) две синие точки?

Рис. 1.

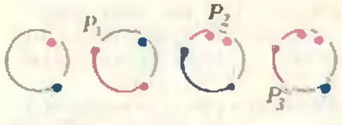


Рис. 2.

Рис. 3.

Рис. 4.

Ответы на вопросы б) и в) положительные.

Для б) это вытекает из того факта, что разрешенными добавлениями в любое место на окружности всегда можно вставить три идущие подряд красные точки (рис. 2). Тогда восемь красных точек получаются из двух красных двукратной вставкой трех красных точек.

С другой стороны, из трех идущих подряд красных точек всегда можно получить две синие (выбросив среднюю точку). Поэтому, добавив к двум данным красным точкам вначале красную, затем — два раза по три красных, а потом заменив эти «красные тройки» на «синие пары», получим красную и шесть синих точек.

Отрицательный ответ на вопрос а) следует из того, что при разрешенных операциях *четность числа синих точек* не меняется, а в исходной и в требуемой заключительной позиции она различна.

Отрицательный ответ на вопрос г) вытекает из другого инвариантного свойства наших операций, обнаружение которого требует гораздо большей наблюдательности и большего количества экспериментов. Кроме того, это свойство является инвариантным только на множестве позиций с четным числом синих точек.

Определим для таких расстановок *альтернированную сумму* $|m_1-m_2+m_3-m_4+\dots+m_{2k-1}-m_{2k}|$ длин серий красных точек: m_1 — число красных точек, заключенных между первой и второй синими точками (направление обхода и первая синяя точка выбираются произвольно), m_2 — число красных точек между второй и третьей синими точками, m_3 — между третьей и четвертой,..., m_{2k} — между последней $2k$-й, и первой синими точками (на рисунке 3 $k=2$, $m_1=2$, $m_2=3$ $m_3=1$, $m_4=5$); некоторые m_i могут равняться нулю. Если синих точек в расстановке нет вовсе, положим эту сумму равной числу ее красных точек.

Оказывается, *делимость на* 3 определенной таким образом суммы — инвариантное свойство. (Поэкспериментируйте с расстановкой, изображенной на рисунке 3, а затем докажите сформулированное утверждение для операции убирания красной точки, рассмотрев случаи, когда ее «соседи» — синие точки, красные точки, точки разных цветов.) Но для двух красных точек наша сумма равна 2 (не делится на 3), а для двух синих — равна 0 (делится на 3). Значит, вторую расстановку из первой получить нельзя.

В заключение заметим, что любую (конечную) расстановку красных и синих точек можно получить из некоторой двухточечной или, что то же самое, из любой расстановки можно получить двухточечную. Это замечание почти очевидно: достаточно убирать красные точки до тех пор, пока на окружности не останутся две точки. Если же на окружности на каком-то шаге остаются только синие точки (в количестве, большем двух), то, добавив красную точку и затем убрав соседнюю с ней, получим расстановку с тем же общим числом точек, содержащую красные точки (рис. 4).

К. Казарновский

◆

Ф668. *Через неподвижный блок перекинута невесомая нить. К одному концу нити прикреплен груз массы m_1. К другому концу на пружине*

Если бы грузы были соединены нитью без пружины, то они стали бы двигаться с ускорением, равным по абсолютной величине

$$a=g\frac{m_2-m_1}{m_2+m_1}$$

с жесткостью k подвешен груз массы m_2. Длина пружины в нерастянутом состоянии равна l_0. Найти амплитуду колебаний, которое будет совершать груз m_2, когда систему предоставят самой себе. Качаний поперек нити нет.

(мы предполагаем, что $m_2 > m_1$). При этом сила натяжения нити была бы равна

$$T = \frac{2m_1m_2}{m_1+m_2}g.$$

Будем считать, что в начальный момент систему удерживают в равновесии с помощью дополнительной силы, приложенной к грузу m_1. Тогда натяжение пружины в начальный момент

$$T_0 = m_2g \neq T,$$

так что кроме ускоренного движения возникают и колебания грузов друг относительно друга. Амплитуда силы натяжения при этих колебаниях равна

$$T_0 - T = \frac{m_2-m_1}{m_2+m_1}m_2g,$$

максимальное растяжение пружины равно

$$\Delta l = \frac{T_0-T}{k}.$$

Смещения грузов при колебаниях обратно пропорциональны их массам. Если l_1 и l_2 — максимальные смещения грузов m_1 и m_2 соответственно, то

$$l_1m_1 = l_2m_2$$

$$l_1 + l_2 = l = \frac{T_0-T}{k} = \frac{m_2-m_1}{m_2+m_1}m_2g.$$

Отсюда находим амплитуду колебаний груза m_2:

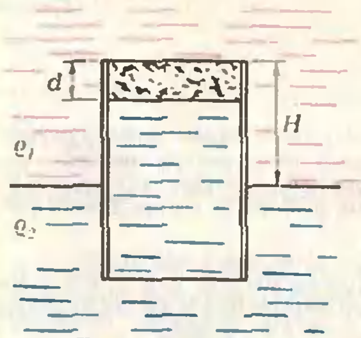
$$l_2 = l\frac{m_1}{m_1+m_2} = \frac{m_2-m_1}{k(m_1+m_2)^2}m_1m_2g.$$

Мы рассмотрели движение грузов при условии, что в начальный момент груз m_2 растягивал пружину. Решите задачу самостоятельно, считая, что пружина в начальный момент не растянута.

Г. Коткин

◆

Ф669. *Перевернутый тонкостенный стакан с пробковым дном толщины d плавает на границе раздела двух жидкостей с плотностями ϱ_1 и ϱ_2. Верхняя часть стакана находится на высоте H над границей раздела. Сечение стакана S. На какое расстояние поднимается стакан, если в дне стакана появится дырка?*



После того как в дне появится дырка, уровни раздела жидкостей внутри и снаружи стакана выравняются. При этом стакан должен начать движение вверх, так как выталкивающая сила увеличивается (возрастает давление снизу на пробковое дно, так как $\varrho_2 > \varrho_1$). Единственный противодействующий эффект возникает из-за того, что при этом уменьшается сила, действующая снизу вверх на торец стенок стакана (стакан тонкостенный; значит, площадь торца $\Delta S \ll S$). Ясно, что в случае, когда увеличение выталкивающей силы не очень значительно (а это будет при небольших значениях величины $H-d$), стакан, всплыв на некоторое расстояние, которое мы обозначим через x, вновь окажется в равновесии. Запишем условия равновесия в первом и втором случае (p_0 — давление на границе раздела жидкостей, L — общая высота стакана):

$$mg + (p_0 - \varrho_1gH)S = \\ = [p_0 + \varrho_2g(L-H)]\Delta S + [p_0 - \varrho_2g(H-d)](S-\Delta S). \quad (1)$$

$$mg + [p_0 - \varrho_1g(H+x)]S = [p_0 + \varrho_2g(L-H-x)]\Delta S + \\ + [p_0 - \varrho_1g(H+x-d)](S-\Delta S). \quad (2)$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получим

$$m = \varrho_1HS - \varrho_2HS + \varrho_1dS + \varrho_2L\Delta S - \varrho_2d\Delta S. \quad (1')$$

$$m = \varrho_1dS + \varrho_2L\Delta S - \varrho_2H\Delta S - \varrho_2x\Delta S + \varrho_1H\Delta S + \\ + \varrho_1x\Delta S - \varrho_1d\Delta S. \quad (2')$$

Приравняв правые части, получим после несложных преобразований:

$$x = (H-d)\frac{S-\Delta S}{\Delta S}.$$

Стакан остановится при движении вверх, если будет выполнено условие $x < L-H$, или

$$H-d<\frac{\Delta S}{S}(L-d).$$

Если это условие не будет выполнено, стакан всплывет на поверхность.

А. Зильберман

◆

Ф670. *Покажите, что максимальная скорость, которую при столкновении может сообщить протону α-частица, составляет 1,6 начальной скорости α-частицы.*

Пусть вначале относительно неподвижной системы отсчета протон покоится, а α-частица имеет скорость $\vec{v}_0$. Процесс их упругого соударения описывается законом сохранения импульса

$$4m\vec{v}_0=m\vec{v}_1+4m\vec{v}_2$$

и законом сохранения энергии

$$\frac{4mv_0^2}{2}=\frac{mv_1^2}{2}+\frac{4mv_2^2}{2},$$

где $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ — векторы скоростей, соответственно, протона и α-частицы в неподвижной системе отсчета после соударения, m и $4m$ — массы протона и α-частицы.

Рассмотрим процесс соударения этих частиц в системе центра масс, то есть в инерциальной системе отсчета, движущейся относительно неподвижной системы отсчета со скоростью $\vec{v}'=\frac{4m\vec{v}_0}{m+4m}=\frac{4}{5}\vec{v}_0$ (в числителе первой дроби стоит полный импульс системы, в знаменателе — ее полная масса). На рисунке изображены вектор $\vec{v}_0$ и векторы скоростей α-частицы (вектор $\vec{OB}$) и протона (вектор $\vec{OA}$) в системе центра масс до соударения: $|\vec{OB}|=\frac{1}{5}|\vec{v}_0|$, $|\vec{OA}|=\frac{4}{5}|\vec{v}_0|$. Согласно закону сохранения импульса, после соударения векторы $\vec{OB'}$ и $\vec{OA'}$ скоростей α-частицы и протона должны лежать на одной прямой и должно выполняться соотношение $|\vec{OB'}|:|\vec{OA'}|=1:4$ (см. рисунок); согласно закону сохранения энергии, $|\vec{OB'}|=|OB|$ и $|\vec{OA'}|=|\vec{OA}|$ (покажите!).

Скорости α-частицы и протона в неподвижной системе отсчета изображены на рисунке векторами $\vec{OC}_2=\vec{OB'}+\vec{v}'$, $\vec{OC}_1=\vec{OA'}+\vec{v}'$ соответственно $\left(\vec{v}'=\frac{4}{5}\vec{v}_0\right)$.

Чтобы ответить на вопрос задачи, мы должны определить максимально возможную длину вектора $\vec{OC}_1$, то есть в равнобедренном треугольнике $OA'C_1$ необходимо определить максимально возможную длину основания при неизменных длинах боковых сторон. Очевидно, что максимум $|\vec{OC}_1|$ равен $2\cdot\frac{4}{5}|\vec{v}_0|=1,6|\vec{v}_0|$. Эта ситуация отвечает центральному удару.

С. Кротов

◆

Ф671. *Имеется 1 л горячей воды с температурой T_1 и 1 л холодной воды с температурой T_2. При помощи горячей воды нагревают холодную. Можно ли сделать так, чтобы окончательная температура воды, бывшей сначала холодной, стала выше температуры воды, которая была сначала горячей?*

Ответ: можно.

Покажем, как это сделать. Пусть в нашем распоряжении имеются сосуд A с горячей водой (температура горячей воды $T_г$), сосуд B с холодной водой (температура $T_х$), сосуд C, стенки которого теплопроводны, и сосуд D, который теплоизолирован.

Нагревание холодной воды проводим в два этапа:

1) Переливаем часть холодной воды из B в C; опускаем C с холодной водой в A. Через некоторое время температуры воды в A и C сравняются: $T_A=T_C=T_1$, причем

$$T_г>T_1>T_х.$$

«Холодную» воду из C переливаем в теплоизолированный сосуд D.

2) Оставшуюся холодную воду выливаем в C; опускаем C в A (в A «горячая» вода с температурой T_1). Через

некоторое время температуры воды в A и C сравниваются: $T'_A = T'_C = T_2$, причем

$$T_1 > T_2 > T_x.$$

Выливаем воду из C в D, где находится «холодная» вода с температурой T_1.

В результате в сосуде D будет «холодная» вода с температурой

$$T_1 > T_3 > T_2,$$

а в сосуде A — «горячая» вода с температурой

$$T_2 < T_3,$$

то есть температура первоначально холодной воды стала выше температуры воды, которая была сначала горячей.

А. Кравчатый

◆

Ф672. *Ко вторичной обмотке включенного в сеть понижающего трансформатора с коэффициентом трансформации $K = 220/127$ подключена нагрузка с сопротивлением $R_н = 10$ Ом. Напряжение в сети $U = 220$ В, сопротивление первичной обмотки трансформатора $R_1 = 3{,}6$ Ом, сопротивление вторичной обмотки $R_2 = 1{,}2$ Ом. Определите напряжение на нагрузке.*

При включении трансформатора в сеть с подключенной нагрузкой в нем возникает переменный магнитный поток амплитуды Φ_0. ЭДС, возникающая в обмотках трансформатора, пропорциональна числу витков и скорости изменения магнитного потока. Это значит, что в первичной обмотке возникает ЭДС

$$\mathcal{E}_1 = n_1 \frac{\Delta\Phi}{\Delta t},$$

а во вторичной обмотке —

$$\mathcal{E}_2 = n_2 \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}.$$

Отношение $\dfrac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_2} = \dfrac{n_1}{n_2} = K$ называется коэффициентом трансформации трансформатора и по условию задачи $K = 220/127 \approx \approx 1{,}73 \approx \sqrt{3}$.

При подключении трансформатора к сети в первичной обмотке потечет ток, равный

$$I_1 = \frac{U - \mathcal{E}_1}{R_1}. \qquad (1)$$

Во вторичной обмотке протекает ток, равный

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}_2}{R_2 + R_н}. \qquad (2)$$

Отношение этих двух токов равно коэффициенту трансформации трансформатора

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{n_1}{n_2} = K = \sqrt{3}. \qquad (3)$$

Напряжение на нагрузке будет равно

$$U_н = I_2 R_н.$$

Из (1) — (3) находим:

$$U_н = \frac{K U_0 R_н}{R_1 + K^2 (R_2 + R_н)} \approx 100 \text{ В}.$$

В. Скороваров

Модели, которые мы выбираем

Для анализа физических явлений мы всегда пользуемся моделями, упрощая и идеализируя реальную ситуацию. Ясно, что в каждом конкретном случае нужно отразить в модели все важные для данной задачи детали и отбросить все лишние (этот совет, как и многие другие, легче давать, чем ему следовать). Поэтому при выборе модели следует оценить, хотя бы приблизительно, действие факторов, которые мы хотим отбросить, и посмотреть, как скажутся сделанные нами допущения и упрощения на точности получаемого решения задачи.

Рассмотрим пример: спортсмен толкает ядро с высоты $h = 1{,}5$ м под углом $\beta = 40°$ к горизонту со скоростью $v = 12$ м/с. Найти дальность полета ядра.

Выберем модель: плоская невращающаяся Земля, воздуха нет, нет также Солнца и Луны. Оценим воздействие отброшенных факторов.

Солнце: дает поправку к ускорению свободного падения $\Delta g_1 = \omega_1^2 R_1$, где $\omega_1 = = 2\pi/1$ год, $R_1 = 150$ млн км; $\Delta g_1 \lesssim 10^{-2}$ м/с^2 ≈

$\approx 10^{-3}g$. Луна дает примерно то же (вспомним приливы).

Сопротивление воздуха: сила лобового сопротивления $F = \alpha s v^2$. Величину α приблизительно можно оценить, зная скорость выпадения града $v_г \approx 20$ м/с при $r_г \approx 0{,}5$ см:

$$\alpha \pi r_г^2 v_г^2 = m_г g = \varrho_г \frac{4}{3} \pi r_г^3 g \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \alpha = \frac{4 \varrho_г r_г g}{3 v_г^2}.$$

Для ядра скорость $v_я$, при которой сила лобового сопротивления воздуха равна силе тяжести, определяется условием

$$v_я = v_г \sqrt{\frac{\varrho_я r_я}{\varrho_г r_г}} \approx 200 \text{ м/с}.$$

Значит для данной в условии скорости $F_{сопр} = mg \left(\frac{12}{200}\right)^2 \approx 3 \cdot 10^{-3} mg$. (Отметим, что при таких скоростях сила вязкого трения больше, чем лобового, однако она также невелика.)

Архимедова сила

$$F_А = \frac{\varrho_в}{\varrho_я} mg \lesssim 10^{-3} mg.$$

Поправка к ускорению свободного падения из-за вращения Земли

$$\Delta g_2 = \omega_2^2 R_2,$$

где $\omega_2 = 2\pi/1$ сутки, $R_2 = 6{,}3 \cdot 10^6 \cos\varphi$ (φ — широта местности). На экваторе $\Delta g_2 \lesssim 3 \times \times 10^{-3} g$.

Цифры в задаче заданы «круглые»; из простых практических соображений ясно, что требуемая точность уж никак не лучше 3—5%. Значит, все перечисленные поправки несущественны, и модель наша вполне разумна. Решение задачи совсем простое, мы его не приводим.

Возможны, однако, ситуации, когда даже небольшие поправки могут оказать решающее воздействие на результат. Это может произойти, например, если мы заинтересуемся различиями в движении нескольких тел. Рассмотрите самостоятельно такой вопрос: попадет ли вертикально выстреленный снаряд назад в ствол орудия?

Модель может оказаться и совсем неприменимой, если она не отражает существенных черт явления. Например, модель абсолютно твердого тела для описания удара абсолютно неприменима — важную роль при ударе играют деформации, а абсолютно твердое тело не деформируется. Еще пример: часто пренебрегают индуктивностью проводников (или — что то же самое — энергией магнитного поля, возникающего вокруг проводника при пропускании по нему тока); однако в известной задаче про конденсатор, который после зарядки закорачивают проводником, нельзя одновременно пренебрегать сопротивлением проводника и его индуктивностью — если сопротивление очень мало, то ток получается весьма большим, и даже при малой индуктивности энергия магнитного поля оказывается существенной. Простой анализ показывает, что индуктивностью действительно можно пренебречь, только если выполняется условие $L \ll r^2 C$.

Очень часто при использовании «плохой» модели концы не сходятся с концами,— куда-то девается (или появляется) энергия, не хватает уравнений для решения задачи и т. п. Это всегда должно настораживать!

Разберем полезный пример: на двух нитях подвешена однородная балка. Требуется найти силы натяжения нитей.

Задача эта очень просто решается: нити будем считать нерастяжимыми, составим уравнения равновесия, то есть запишем условия равенства сил и моментов сил,— и неизвестные величины сразу определятся.

Добавим теперь еще одну нить. Сразу появляются неприятности — не хватает уравнений. В чем дело?

Причина тут довольно серьезная — не годится модель. В случае двух нитей она подходила — малые растяжения нитей были несущественны, они приводили лишь к тому, что балка чуть криво висела, а силы при этом практически не менялись. Если же нитей три, положение совсем другое. Чуть ослабим одну нить — вся нагрузка сразу придется на две другие. Значит, малые растяжения существенны, и модель «нерастяжимые нити» не годится. (Ведь можно пренебрегать каким-то фактором, только убедившись, что его влияние пренебрежимо мало.)

Положение легко поправить — нужно задать коэффициенты жесткости нитей (можно одинаковые, если их длины одинаковы) и из геометрических соображений найти связь между удлинениями нитей, а значит, и между силами натяжения. Это и будет недостающее уравнение.

Системы такого рода называют «статически неопределимыми», имея в виду необходимость к уравнениям сил и моментов — уравнениям статики — добавлять уравнения, характеризующие физические свойства тел (например, жесткость). Статически неопределимые задачи встречаются не так уж редко. Например, задача о распределении сил давления на кирпич, лежащий на наклонной плоскости. Она похожа на только что рассмотренную, только опор не три, а очень много. Малейшая неровность на основании кирпича кардинально меняет результат — кирпич нельзя считать абсолютно твердым телом.

Особенно каверзными бывают задачи, где взаимодействуют много тел и при этом есть трение. Один пример: задача про песок, насыпанный в кузов автомобиля (см. Ф656). Давление на стенку кузова зависит и от того, как мы насыпали песок, и от того, как именно движется автомобиль (напомним тем, кто давно не ездил в кузове грузового автомобиля, что даже при движении с постоянной скоростью кузов сильно трясет). Из-за непрерывных толчков в разные стороны сухой песок постоянно перемешивается, при этом силы трения между песчинками все время меняют направление. В среднем при этом действие сил трения компенсируется, и песок напоминает жидкость, налитую в кузов (нечто похожее происходит, когда, желая наблюдать картину силовых линий магнитного поля, мы насыпаем железные опилки на лист бумаги и потряхиваем его, чтобы ослабить трение).

В этом случае задачу легко решить.

Однако все может происходить иначе. Мы можем, например, плотно набить песок в кузов, добиваясь «заклинивания» песчинок, когда уже никакая тряска не поможет — сила давления на стенку может при этом оказаться во много раз больше.

Если же мы насыпаем песок медленно и аккуратно, конусом, а потом осторожно заполняем края и тщательно избегаем тряски, то сила давления может оказаться существенно меньше, чем в «гидростатическом» случае. В общем, статически неопределимые задачи имеют множество одинаково верных (и неверных, разумеется) решений.

Разумный выбор модели может очень облегчить решение серьезной проблемы, причем модель может быть и очень неожиданной. Капельная модель ядра позволила оценить многие эффекты, связанные с устойчивостью ядер; планетарная модель Бора дает возможность вычислить множество полезных величин, хотя ясно, что на самом деле все устроено совсем не так. Ведь модель должна передавать далеко не все свойства изучаемого объекта (как например, гиря на чашке весов моделирует далеко не все свойства взвешиваемого куска сыра).

Итак, при выборе модели явления нужно быть очень аккуратным, не забывая, однако, о том, что живо и наглядно представить себе явление — значит существенно продвинуться в решении задачи.

А. Зильберман

«Математику» — 10 лет

Летом 1980 года исполнилось 10 лет лагерю «Математик». Этот лагерь ежегодно в июле месяце проводится для сельских школьников Вологодской области кафедрой математического анализа Вологодского государственного педагогического института совместно с областным советом профсоюзов, областным отделом народного образования и областным комитетом ВЛКСМ.

В лагере проводится разнообразная политико-воспитательная, культурно-массовая и спортивно-оздоровительная работа, регулярно выпускаются математические газеты и бюллетени, оформляется математический зал, проводится день математических игр и 7 математических боев, две лагерные олимпиады по математике: в начале смены и в конце (это позволяет увидеть результаты работы), конкурс на лучшее решение задач, итоги которого подводятся в конце работы лагеря.

Подробно о лагере рассказано в журнале «Математика в школе», 1980, № 5, с. 64—66. Здесь мы приводим некоторые задачи конкурса, проведенного в «Математике — 80».

1. Лист бумаги площадью 60 см^2 покрыт тремя разноцветными кляксами площадью по 30 см^2. Доказать, что найдутся две кляксы, у которых площадь общей части не меньше 10 см^2.

2. Фокусник предлагает вам записать любое трехзначное число. Затем он подходит и, взглянув на написанное число, сразу приписывает три цифры так, что образовавшееся шестизначное число делится на 37. Как он это делает?

3. Найти все пары целых чисел, сумма которых равна их произведению.

4. Число лет некоторого человека в 1962 году равнялось сумме цифр его года рождения. В каком году он родился?

5. Найти наибольшее четное пятизначное число, первые три цифры которого образуют число, представляющее точный квадрат, а последние три цифры — точный куб.

6. Известно, что $x+1/x$ — целое число. Докажите, что тогда число x^8+1/x^8 — тоже целое.

7. Известно, что $a+b+c<0$ и что уравнение $ax^2+bx+c=0$ не имеет действительных корней. Какой знак имеет число c?

8. Известно, что a, b, c — различные числа, причем $a^3+pa+q=0$, $b^3+pb+q=0$; $c^3+pc+q=0$. Доказать, что $a+b+c=0$.

9. Дан острый угол и точка A внутри него. Построить треугольник ABC минимального периметра, вершины B и C которого лежат на сторонах данного угла.

10. В четырехугольнике три тупых угла. Доказать, что из двух его диагоналей большей является та, которая проведена из вершины острого угла.

11. Точка M — центр круга, вписанного в треугольник ABC. Доказать, что центр окружности, проходящей через точки A, M, C, лежит на биссектрисе угла B.

12. При каком значении k уравнения $x^3+kx+1=0$ и $x^4+kx^2+1=0$ имеют общий корень? Найти этот корень.

13. Доказать, что число, которое записывается 81 единицами, делится на 81.

14. При каких c уравнение $4x^3-3x=c$ имеет один, два, три корня?

15. Доказать справедливость неравенства $(n\in N)$

$$\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}>\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Ю. Ломакин,
В. Горбунова

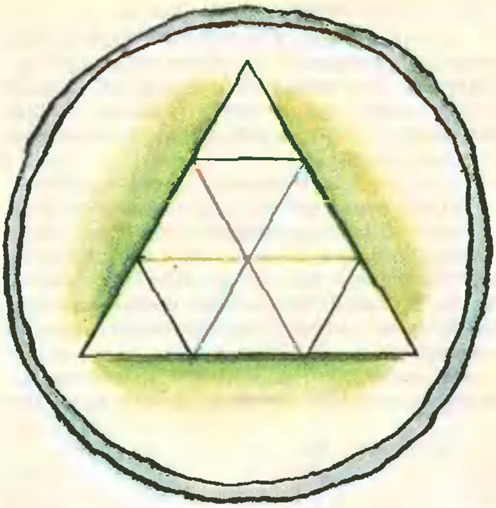
Квант для младших школьников

Задачи

1. При каких значениях n в выражении

$$*1*2*...*n=n+1$$

можно так расставить знаки «+» и «—» вместо *, чтобы получилось верное равенство?



2. Треугольник со стороной 3 разбит на девять маленьких треугольничков со стороной 1 (см. рисунок).

а) Расставьте в них числа от 1 до 9 так, чтобы суммы четырех чисел в трех треугольниках со стороной 2 были одинаковыми.

б) Какие значения может принимать эта сумма?

3. Двое детей, совершенно запутавшихся в подсчете дней недели, остановились по дороге в школу, чтобы во всем разобраться.

— Когда «послезавтра» станет «вчера», — сказала Присилла, — то «сегодня» будет так же далеко от воскресенья, как и тот день, который был «сегодня», когда «позавчера» было «завтра».

В какой день недели произносился этот головоломный лепет?

4. Можно ли раскрасить квадратную сетку размером $n \times n$ ($n \geqslant 3$) в шесть цветов так, чтобы в любом прямоугольнике 2×3 содержались бы клетки всех шести цветов?

5. В сказочной стране Перра—Терра среди прочих обитателей проживают карабасы и барабасы. Каждый карабас знаком с шестью карабасами и девятью барабасами. Каждый барабас знаком с десятью карабасами и семью барабасами. Кого в этой стране больше — карабасов или барабасов?

Эти задачи нам предложили *Ю. Аленков, Ф. Бартенев, А. Кабризон, Н. Нецветаев.* Задача № 3 взята из книги Сэма Лойда «Математическая мозаика» (М., «Мир», 1980, задача 31).

Турнир имени М. В. Ломоносова

> *Есть ли на свете человек, который мог бы обнять необъятное?*
> К. Прутков

В этом году московские школьники 5—8 классов в четвертый раз придут на уже ставший традиционным турнир имени М. В. Ломоносова. Он будет проходить 27 сентября с 10 часов утра в помещении различных московских вузов, таких как МАИ, МГПИ, МИИГАиК, МИСИ, МИСиС, МИЭМ, МЭИС (программа турнира везде одна и та же). Адрес для справок: 109028, Москва, Б. Вузовский пер. 3/12, МИЭМ, физико-математическая школа.

Такие ежегодные встречи, в отличие от олимпиад, собирают под одной крышей несколько разнообразных конкурсов — по математике и физике, биологии и химии, лингвистике и науке о Земле. Год от года их состав несколько меняется.

Но это не просто одновременное проведение в одном месте нескольких олимпиад. Члены оргкомитета и жюри турнира — в основном, студенты или недавние выпускники московских вузов. Когда-то они регулярно посещали олимпиады, каждый — по своей науке, но теперь поняли все недостатки узкой специализации, пожалев об ее раннем для себя начале. Добавить к олимпиадной глубине ломоносовскую широту — вот основная цель турнира.

Что же положено в основу турнира? Во-первых, у организаторов нет никаких обязательных требований к участникам, кроме единственного — не мешать другим, если те этого не хотят. Каждый пришедший на турнир сам выбирает себе конкурс по вкусу: он может все время потратить на математику или, если захочет, обойти все аудитории, где проводятся разные конкурсы. И надо сказать, что даже заядлые приверженцы одной науки часто не могут устоять перед искушением заглянуть на «чужие» конкурсы и вдруг начинают понимать, что многие вещи, которые раньше им казались скучными и неинтересными, на самом деле не так уж скучны и неинтересны. Так что большинство участников становятся «многоборцами».

Второе замечательное качество — примерно одинаковое число участников и организаторов, причем каждый участник может прямо во время турнира побеседовать на соответствующую тему с любым членом жюри. Особой тактики придерживаются биологи: они предлагают несколько десятков вопросов, которые тут же обсуждаются со школьниками. Бывает, что такие беседы рождают новые вопросы и затягиваются к обоюдному удовольствию сторон. Например, в прошлом году восторг и буйство фантазии участников вызвала задача, в которой предлагалось помечтать об особенностях жизни на планете, где единственным источником энергии ее обитателей является гравитационное поле. (Как видно, деление по предметам — весьма условное.)

И третья особенность. Ясно, что, например, на математическом конкурсе постоянный читатель «Кванта» окажется в выигрышном положении, скажем, перед химиком, который и попал-то на этот конкурс случайно, в поисках своего, химического. Или наоборот. Вот почему организаторы конкурсов стараются придумать такие задачи и вопросы, решение которых требуют не столько тренированности, сколько умения подумать, сопоставить, увидеть в странном — простое, в неизвестном — знакомое. Конечно, в каждом конкурсе есть и сложная задача — для любителей. Но все-таки бо́льшая часть заданий предполагает не только хорошую память на формулы. Умение «на пальцах» объяснить решение или высказать о нем разумную идею — это то, что требуется.

Кроме заданий серьезных участникам предлагаются и задачи шуточные. Например, такая: ***могут ли 40 человек (массой по 70 кг) поместиться в телефонной будке?*** Несмотря на несерьезность вопроса, ответ на него предполагает вполне здравые «физические» рассуждения. И действительно. Вспомним, что человек может довольно хорошо плавать; следовательно, плотность человека приблизительно равна плотности воды. Объем телефонной будки легко оценить на глаз: 2—2,5 м^3. Зная, что 1 м^3 воды имеет массу 1000 кг, получаем, что в такую будку можно «залить» 28—35 человек. (Для справки: в 1975 году в Калифорнии был установлен «мировой рекорд» — в телефонную будку залезли 26 человек.)

Как показывает опыт, наибольший интерес вызывают задачи, которые можно «пощупать» своими руками. И это достижимо не только на конкурсе по экспериментальной физике. Придумывают и математики. Однажды они провели конкурс по «экспериментальной математике» (бывает и такое!), а в другой раз — по «игровой». Что будет в этом году — еще не известно.

Атмосфера непринужденности и творчества на турнире сказывается во многом. Например, на одном из предыдущих турниров в результате совместных экспериментов участников и организаторов родилось несколько ранее не известных жюри вариантов задачи о вращении бумажной вертушки при ее падении в воздухе

«Прибор» для опыта — своими руками.

Опыт начался.

Члены жюри готовят опыты для физического конкурса.

Фото Е. Шаблыгина и А. Клопотовича

В заключение приведем несколько задач из прошлых турниров.

Задача 1 (теоретическая физика). *На столе на одинаковом расстоянии от стены лежат две шайбы. В них одновременно стреляют из двустволок. Одной шайбе пуля попадает в центр, а другой — в бок. Пули застревают в шайбах. Какая шайба быстрее докатится до стены? Трение отсутствует.*

Ответ прост: так как начальный импульс у шайб с пулями одинаков и в данных условиях у системы «шайба — пуля» импульс сохраняется, то обе шайбы достигнут стены одновременно. Но многие, кто решал эту задачу, приводили такие рассуждения: энергия пули, попавшей в бок шайбе, расходуется на вращение и на поступательное движение шайбы, а энергия второй пули — только на поступательное движение. Значит, вторая шайба имеет большую кинетическую энергию и движется быстрее. Где здесь ошибка?

Задача 2 (теоретическая физика). *Один шарик лежит на столе, а другой — подвешен на нити. У какого шарика больше теплоемкость, если они абсолютно одинаковые?*

Вспомним, что теплоемкость — это количество теплоты, которое надо передать телу, чтобы нагреть его на один градус. Поскольку шарики одинаковые, изменение их внутренней энергии одинаково. Однако, нагреваясь, тела расширяются. При этом у шарика, лежащего на столе, центр тяжести поднимается, а у висящего на нити — опускается. Следовательно, шарику, лежащему на столе, надо будет добавить энергию, чтобы приподнять его центр тяжести, а шарик, висящий на нити, часть своей потенциальной энергии переведет в тепловую. Ясно, что у первого шарика теплоемкость больше.

Задача 3 (экспериментальная физика). *Если катушку потянуть за нитку, держа ее низко над землей, катушка покатится к тянущему. А если поднять нитку выше, катушка покатится в противоположную сторону. Почему?*

Посмотрите на рисунок 1. Точка A — мгновенный центр вращения катушки. Очевидно, что, если сила натяжения нитки создает опрокидывающий катушку момент относительно точки A, катушка покатится в ту сторону, в которую ее опрокидывают. Так, натяжение нитки *1* заставляет катушку катиться влево, натяжение нитки *2* — вправо, а натяжение нитки *3* лишь приподнимет катушку.

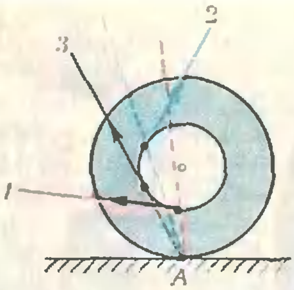


Рис. 1.

Задача 4 (наука о Земле). *Почему бессмысленно указывать в календарях время восхода Солнца в Москве с точностью до секунды?*

Оказывается, в различных частях Москвы восход начинается в разное время, и это различие доходит до двух минут. Но это происходит не потому, что Москва расположена на семи холмах, на вершинах которых восход встречают раньше, чем в низине, и не потому, что неясно, что считать восходом — когда Солнце лишь показалось или когда оно целиком вышло из-за горизонта (об этом всегда можно договориться). Все дело в том, что Москва имеет относительно большую протяженность.

Оценим, какую часть соответствующей параллели занимает Москва. Длину этой параллели найдем, зная длину парижского меридиана ($\sim$40000 км) и широту, на которой расположена Москва ($\sim$60°): $l \sim 40000$ км $\times 0{,}5 \sim 20000$ км. Считая, что диаметр Москвы $d \sim 30$ км, получим, что искомая часть равна $d/l \sim 30/20000 \sim 1{,}5 \cdot 10^{-3}$. Следовательно, время восхода на восточной окраине Москвы отличается от времени восхода на ее западной окраине на $\Delta t \sim 24$ ч $\cdot\, 1{,}5 \cdot 10^{-3} \sim 2$ мин.

Задача 5 (игровая математика). *На шахматной доске в левом нижнем углу стоит ладья. Двое играющих по очереди двигают эту ладью (за один ход ладья может перемещаться на любое число полей по вертикали или горизонтали). В данной игре ладья не может двигаться влево и вниз, а может вправо и вверх. Проигравшим считается тот, кто привел ладью в правый верхний угол. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий игру или тот, кто ходит вторым?*

Если задача сразу не поддается решению, полезно рассмотреть какой-нибудь ее частный случай или, наоборот, обобщить задачу. Рассмотрим игру на доске 3×3 (рис. 2). Ясно, что после любого хода первого игрока (на b1, c1, a2, a3) второй может поставить ладью на b3 или c2 и выиграть. Если бы игра велась на доске с полубесконечными «крыльями» (рис. 3), второй игрок выигрывал бы после того, как первый поставит ладью на эти «крылья» (ходом на b3 или c2). Если теперь свести игру на доске $n \times n$ к игре на доске

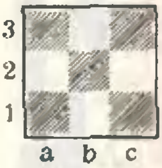


Рис. 2.

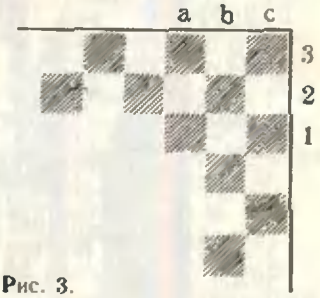


Рис. 3.

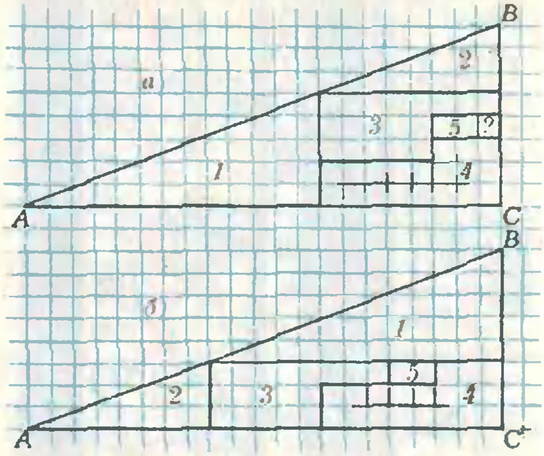


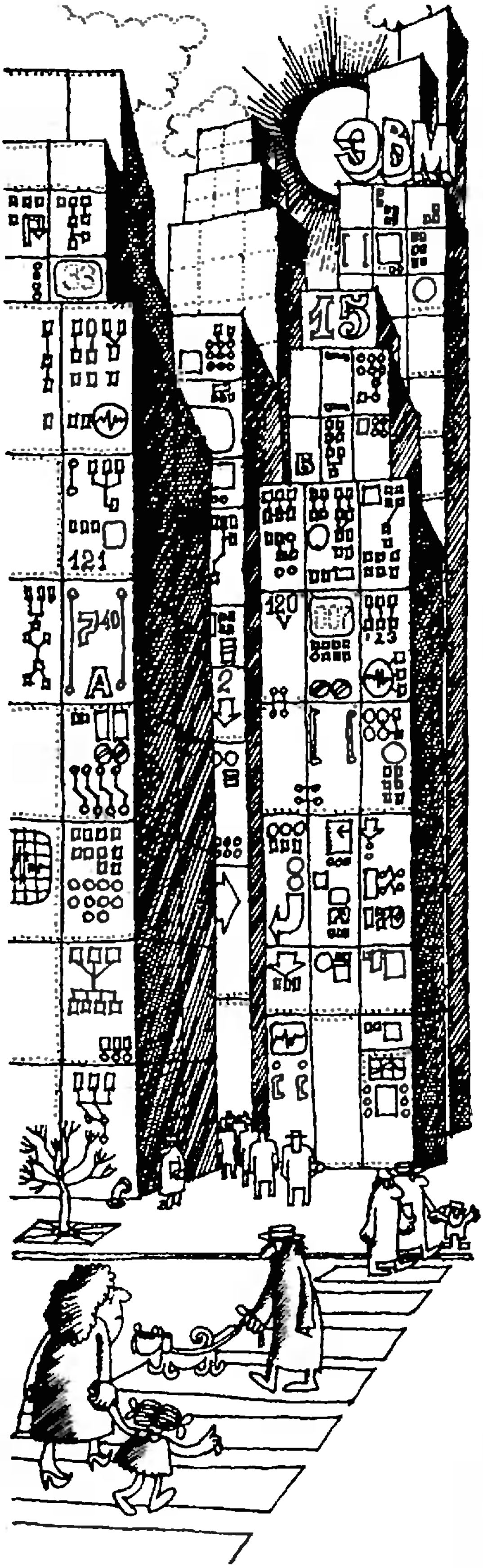
Рис. 4.

3×3 с «крыльями», получится, что всегда будет побеждать второй игрок. А сделать это очень просто: на любой ход первого игрока второй отвечает ходом, возвращающим ладью на диагональ a1—b2,..., пока первый игрок не пойдет ладьей на одно из «крыльев». А уж там...

Задача 6 (?). *Два треугольника* (рис. 4) *составлены из одних и тех же частей. Тем не менее площади у них разные. Почему?*

На самом деле обе фигуры — не треугольники, а четырехугольники: на глаз излом линии AB заметить трудно.

А. Николаев, В. Гяхт



Б. Бабаян

Многопроцессорный вычислительный комплекс «Эльбрус»

В этой статье рассказывается о новой советской вычислительной машине. Как и у всякой ЭВМ, у нее есть процессор («Квант», 1980, № 5) и память («Квант», 1980, № 4). Вернее, даже целая иерархия запоминающих устройств: очень быстродействующая, но сравнительно маленькая по объему память, расположенная в самом процессоре; основная память; медленная «внешняя память». Информация из внешней памяти поступает в основную память с помощью специальных процессоров ввода-вывода.

Модульная система

Так сейчас устроены почти все ЭВМ. Отличие «Эльбруса» заключается в том, что он разбит на сравнительно слабо связанные между собой части (устройства), называемые *модулями.* Примеры модулей: процессор, основная память, устройство ввода-вывода и т. п. Для модулей характерны небольшое число внешних связей и хорошая взаимозаменяемость. Как правило, модули соединяются друг с другом по принципу «каждый с каждым», то есть каждый процессорный модуль соединяется с каждым модулем основной памяти и т. д.

Такая организация имеет много преимуществ. Во-первых, используя различное число однотипных модулей, можно получать разные вычислительные машины разной производительности; увеличивая число модулей, можно постепенно наращивать мощность машины. Во-вторых, если в машине поломался какой-либо модуль, то это приведет лишь к временному снижению ее скорости, так как остальные модули продолжают работать. В-третьих, собирая много однотипных модулей в одну систему, мы можем получить машину, которая считает значительно быстрее, чем в обычном случае.

Таким образом, система «Эльбрус» имеет очень переменный состав. Если не принять надлежащих мер, то при каждом изменении состава пришлось бы переписывать программы. Так было бы, например, если бы в программе содержался адрес ячейки памяти из модуля, который поломался. Чтобы этого не происходило, в «Эльбрусе», кроме реальной памяти, существует *виртуальная*, или *математическая*, память. Это уже не реальное устройство, расположенное в определенном месте машины, а абстрактное понятие, состоящее из совокупности чисел, обозначающих адреса «математических ячеек» (для «Эльбруса» это числа от 0 до $2^{33} \approx 4 \cdot 10^9$). Именно эти адреса используются при работе программ, а перевод их в адреса реальных ячеек производится автоматически, по специальным таблицам. Таким образом, если меняется состав машины, то меняются лишь эти таблицы, а программы остаются неизменными.

Объем виртуальной памяти значительно больше объема реальной машинной оперативной памяти. Наличие таблиц перевода позволяет ненужную в данный момент информацию хранить во внешней памяти, отметив этот факт в таблицах.

Для удобства программиста

Еще более важной чертой «Эльбруса» является внимательное отношение к проблемам программирования. Разработчики старались сделать эту машину удобной для программистов. А проблемы в области программирования сейчас стоят очень серьезные. В конце 60-х годов стали даже говорить о кризисе программирования. Дело в том, что за 30 с лишним лет существования вычислительной техники способы производства вычислительных машин шагнули далеко вперед, а производство программ (программирование) остается, в основном, ручным трудом. Программ надо разрабатывать так много, что, кажется, недалек тот день, когда почти каждый образованный человек будет программировать. Кроме того, существует много полезных алгоритмов, которые могли бы быть выполнены современными вычислительными машинами, но которые просто невозможно запрограммировать ввиду большого объема и сложности соответствующих программ.

Одним из хорошо известных способов, облегчающих программирование, являются так называемые *языки высокого уровня* (Алгол, Паскаль, Рапира и др.). Языки высокого уровня — это, по существу, абстрактные машины, придуманные программистами и реализованные на реальных машинах с помощью программ. Специальные программы, называемые *трансляторами*, переводят программы с языков высокого уровня на машинные языки.

В «Эльбрусе» много сделано для того, чтобы можно было легко и быстро транслировать программы с языков высокого уровня и чтобы полученные программы быстро работали и занимали мало места в памяти. Это, например, безадресная система команд, описанная в статье «Трехадресные, одноадресные и ...безадресные машины» («Квант», 1981, № 4).

Теги

Очень важным, с точки зрения программирования, является введение в «Эльбрус» системы тегов. *Теги**) — это служебные разряды, сопровождающие каждое машинное слово и описывающие его тип. В других машинах информацию о том, например,

---

*) Английское слово tag означает «бирка», «ярлычок».

какое в данной ячейке число (целое или действительное, длинное или короткое), надо хранить в самих командах; поэтому различных команд, выполняющих, например, сложение, очень много. В результате удлиняется программа: чтобы закодировать все эти операции, нужно много двоичных разрядов. В «Эльбрусе» одной и той же операцией можно складывать и два целых числа и целое с действительным и короткое действительное с длинным целым и т. д. Машина, разбирая теги исходных чисел, понимает, какие преобразования чисел нужно выполнить перед операцией. Благодаря наличию тегов вылавливается много ошибок в программах.

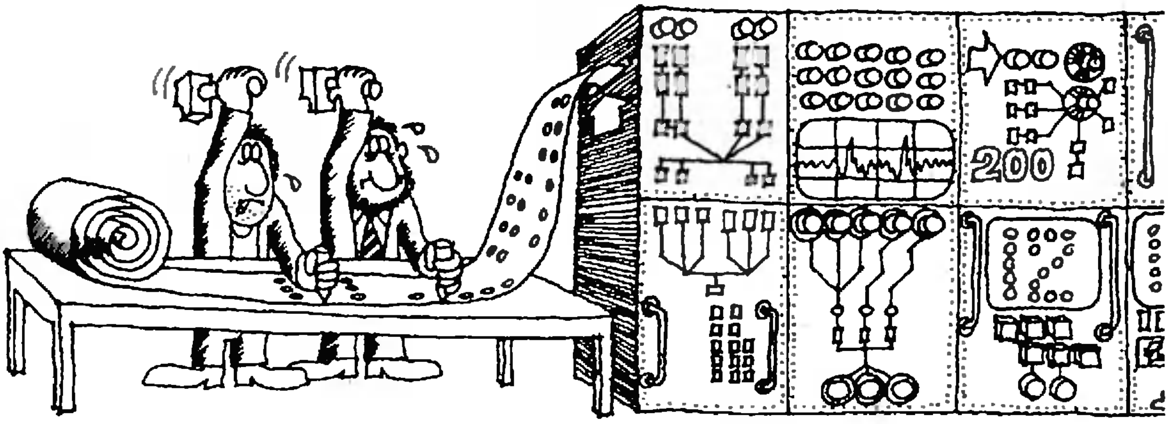
Сама машина следит, например, за тем, чтобы нельзя было выполнить сложение двух машинных слов, содержащих адреса ячеек памяти. Такой дополнительный контроль позволяет быстрее отыскать ошибки, то есть сильно облегчает отладку программ. Особенно важно, что, какие бы ошибки ни допустил программист, машина не разрешит выполнять неправильные действия с адресной информацией.

Защита памяти

В случае ошибки, обнаруженной машиной, решение задачи аварийно прекратится. Таким образом, благодаря наличию тегов появилась возможность строго контролировать рождение адресной информации и ее обработку. В результате в «Эльбрусе» удалось реализовать новую, очень удобную и эффективную систему защиты информации.

Защита информации — очень важный вопрос при работе современной машины. Большие машины одновременно выполняют много задач, но эти задачи решаются не совсем одновременно. Если, например, при решении какой-либо задачи потребовалось обратиться к медленно действующим внешним запоминающим устройствам для пересылки из них информации в основную память, то эта сравнительно длительная работа поручается процессорам ввода-вывода, сам центральный процессор переключается на решение какой-либо другой задачи. «Распределением обязанностей» в этом случае ведает *операционная система* — совокупность специальных программ, управляющая прохождением задачи и организующая процесс «параллельного» выполнения их решений.

В многопроцессорной машине процессоров много, но задач, расположенных в памяти, еще больше, так что процессоры по очереди решают все задачи. Если в какой-либо задаче может существовать ошибка, которая будет менять информацию в ячейках памяти другой задачи, то говорят, что при этом нарушается *защита памяти*. Если бы такое могло случиться, то другая задача была бы решена неверно. Во всех современных машинах существуют те или иные способы защиты памяти. В



«Эльбрусе» защита памяти основана на использовании тегов.

Адресная информация, содержащая описание определенных областей памяти, нужных для данной задачи, и снабженная специальными тегами, называется *дескриптором*. Если задача располагает лишь дескрипторами, описывающими ее собственные области, то никаким способом нельзя во время решения этой задачи добраться до других областей, то есть нарушить защиту. В «Эльбрусе» защита осуществляется не только между задачами, но и между отдельными частями одной и той же задачи. Такие части называются *процедурами*.

Очень удобно отлаживать процедуры независимо друг от друга, а потом объединять их в одну большую программу. Такой метод программирования, поддержанный в «Эльбрусе» аппаратно, благодаря наличию в машине готовых процедур, часто называют *модульным*. Он тоже очень сильно облегчает программирование.

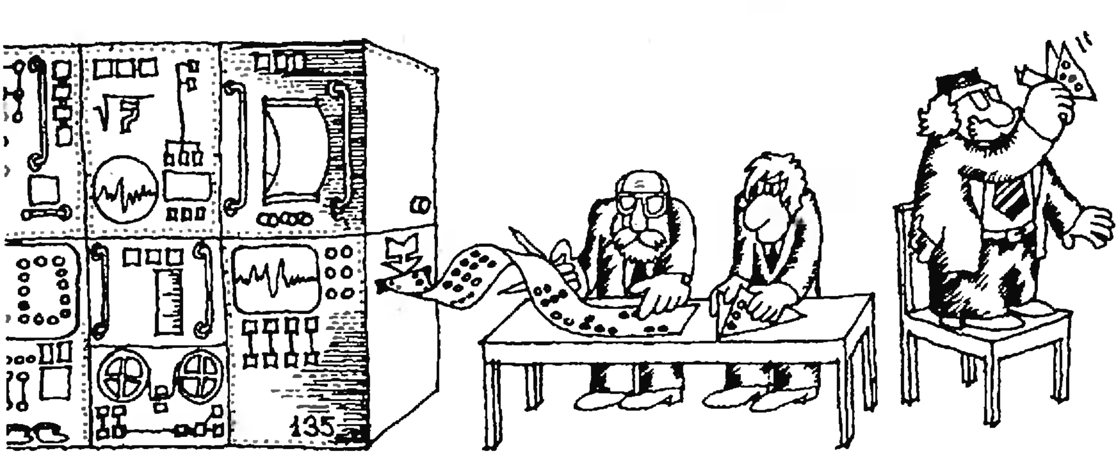
На «Эльбрусе» все программы пишутся только на языках высокого уровня, в том числе наиболее сложные системные программы, например операционная система и трансляторы. Раньше эти программы, как правило, писались практически на языке машины.

Еще быстрей

Удобство программирования — важнейшая сторона системы «Эльбрус», но, кроме того, эта машина очень быстрая*). Мы уже говорили в начале статьи, что ее скорость повышается благодаря наличию многих процессоров. В то же время каждый процессор обладает очень высокой скоростью. В прошлом принято было считать, что всякие удобства, включаемые в машину, замедляют ее. Однако это было верно тогда, когда при разработке машины инженеры сильно экономили оборудование. Теперь же, когда в результате технологического прогресса оказалось возможным сосредоточить в старых объемах на несколько порядков больше оборудования с улучшением практически всех его параметров, положение коренным образом изменилось. Ориентация на программистские проблемы вынудила разработчиков наиболее типичные и часто встречающиеся конструкции языков реализовать в аппаратуре, что значительно повысило производительность каждого процессора. В настоящее время не будет преувеличением сказать, что только машина, ориентированная на удобное программирование, позволяет получить предельно большую производительность.

---

*) По быстродействию десятипроцессорный «Эльбрус-2» превосходит одну из самых мощных современных отечественных машин БЭСМ-6 примерно в 100 раз.



Мир глазами инженера

Недавно в издательстве «Мир» (в серии «В мире науки и техники») вышла книга известного английского инженера, специалиста по теории прочности профессора Редингского университета Джеймса Эдварда Гордона. Называется эта книга «Конструкции, или Почему не ломаются вещи». Она посвящена проблемам конструирования и физическим основам теории прочности.

Тема, затронутая в книге, сложна как для специалистов, прекрасно знающих все трудности и проблемы, возникающие при работе в этой области, так и для находящихся в счастливом неведении дилетантов. Правда, двести лет назад (не говоря уже о более давних временах) специалисты отличались от дилетантов только тем, что, находясь в том же счастливом неведении, как же точно надо строить, они все же осмеливались строить на свой страх и риск. Довольно часто расплатой за подобную дерзость служили груды обломков. К счастью, результаты деятельности инженеров и строителей прошлого не всегда бывали столь плачевны. В этом нас красноречиво убеждают уникальные памятники архитектуры. Однако строить методом проб и ошибок, не зная наверное, удастся ли довести строительство до конца, было довольно накладно. Блестящие умы прошлого пытались превратить процесс строительства и конструирования из искусства по наитию в строгую и точную науку. Насколько трудновыполнимой была эта задача, можно судить хотя бы по такому факту. В самом начале XIX века Юнг ввел понятие модуля упругости (ныне носящего его имя) — фундаментальнейшего понятия теории упругости. Вот как он его объяснял: «Модуль упругости любого вещества есть столб этого вещества, способный производить давление на свое основание, которое так относится к весу, вызывающему определенную степень сжатия, как длина вещества к уменьшению этой длины». Не удивительно, что, прежде чем модулю Юнга удалось завоевать умы инженеров, прошла добрая половина столетия. Дальше дело продвигалось более быстрыми темпами (в основном, благодаря успешному союзу с инженерной практикой), но до самого конца XIX века было немало успешно работающих инженеров-практиков, пользующихся только собственной интуицией и свысока смотревших на «новомодные теории». Справедливости ради следует заметить, что инженеры-теоретики тех времен, добросовестно выполнив все расчеты, ошибались ничуть не реже своих коллег-практиков. Правда, у теоретиков было одно преимущество, в конечном итоге обеспечившее им победу: один раз поняв причину ошибки, они ее больше не повторяли.

На протяжении всей книги профессор Гордон как заядлый детектив занимается поисками преступника, разрушающего все встречающееся на его пути: будь то дома, мосты, корабли или плотины. По ходу дела выясняется, что бороться надо не с одним преступником, а с целой бандой: виновниками катастроф оказываются и концентрация напряжений, возникающая около отверстий и приводящая к растрескиванию материала; и деформации — растяжения, сдвиги, кручения; и линии давления, коварно выходящие за допустимые границы. Согласно законам жанра, преступников в конце концов удается выявить и в некоторой степени обезвредить, создав такие условия (то есть такие конструкции), в которых они не могут проявить свои разрушительные способности. Но стоит инженеру или конструктору упустить из вида хоть одного из героев повествования, как тот не замедлит напомнить о себе грудой обломков и руин, возникающих на месте неосмотрительно смело созданных конструкций.

Сравнение серьезной книги с детективом в данном случае вполне уместно. Книга читается с большим интересом, что прежде всего можно объяснить ее литературными достоинствами. Автор не просто излагает читателю факты, сами по себе достойные внимания. Он ведет занимательное повествование, снабжая факты такими мелкими и достоверными подробностями, что читатель из стороннего наблюдателя сам превращается в соучастника событий. Так, например, рассказывая о хитроумной и сложной оснастке парусных судов, Дж. Гордон пишет: «Каждая секция мачты делается из отдельного бревна и удерживается в нужном положении сложной и хитроумной системой вант и растяжек. Система устроена таким образом, что при необходимости все верхние части мачты и реи могут быть разобраны и спущены на палубу. Так как самые большие брусья весят по нескольку тонн, требуется не только мастерство, но и немалое присутствие духа, чтобы поднимать и опускать такие громоздкие предметы на качающемся корабле. Большой корабль имел команду примерно 800 человек, большинство из них могло бы посрамить как верхолазов, так и тренированных атлетов. Парусные учения британского флота на Средиземном море в 40-х годах прошлого века стали легендой. Адмирал, закончив завтрак, мог подать сигнал: всем кораблям сменить стеньги; о затраченном времени и числе несчастных случаев доложить». Дальнейшее успешно дорисует воображение читателей: пища для фантазии дана богатая.

В занимательной, а иногда и парадоксальной форме читателю преподносится множество интереснейших сведений. Оказывается, то, что мы называем архитектурными излишествами (башенки, статуи, фигуры, контрфорсы, аркбутаны, своды и т. д.), на самом деле обеспечивает крепость и надежность зданий. Не всегда замена ломающихся деталей на более массивные и прочные приводит к желаемому результату повышения надежности. Так произошло, например, с крылом моноплана Д-8 времен первой мировой войны. После замены задних лонжеронов крыльев на более толстые и прочные число аварий не сократилось, а, наоборот, увеличилось, причем самолет исправно начинал разрушаться именно с упрочненных задних лонжеронов. Или разве не интересно узнать, что затея древних вавилонян построить башню до небес вовсе не является такой уж безумной. Пользуясь материалом своей эпохи, древние строители вполне могли построить башню высотой свыше двух километров (вряд ли по представлениям древних их боги устраивали свои обиталища так высоко). Единственное, о чем надо было позаботиться древним строителям, — чтобы башня стояла строго вертикально; статические же нагрузки на каменную кладку в такой башне были бы вполне безопасны.

Много интересного можно узнать и о живых конструкциях, внимание которым автор уделяет постоянно. Так, надежное кровоснабжение всего нашего организма обеспечивается удивительными упругими свойствами стенок кровеносных сосудов; дерево оказывается в состоянии выдерживать напор сильного ветра, благодаря исключительно оригинальному распределению напряжений в стволе; несимметричная форма перьев птиц объясняется неравномерным распределением давления воздуха на них во время полета; оказывается, с точки зрения физики, между автомобилем, лыжником и кенгуру имеется много общего, а простой земляной червяк являет нам пример блестящего решения довольно сложной конструкторской задачи.

Особый колорит придают книге со вкусом подобранные к отдельным разделам и главам эпиграфы. Чтение их может доставить немало приятных минут.

Однако настроившихся на легкое и развлекательное времяпрепровождение читателей необходимо предупредить, что восприятие некоторых понятий и определений требует при чтении определенного напряжения, поскольку автор строго и последовательно (несмотря на занимательность формы и непринципиальные упрощения) излагает точную научную дисциплину.

В заключение, к сожалению, приходится констатировать, что профессор Дж. Гордон, как истый англичанин, признает все только английское, обращая свой взор на другие страны только в том случае, если для конкретных примеров в Англии ничего подходящего отыскать невозможно. Надо полагать, что более частое обращение к практике инженеров-неангличан позволило бы сделать повествование еще более занимательным и поучительным.

А. Аринштейн

Алгебра без чисел

В XX веке роль алгебры в современной математике возросла настолько, что сейчас говорят об «алгебраизации» математики. Этот процесс почти не нашел отражения в школьном курсе, однако было бы очень полезно, чтобы школьники, интересующиеся математикой, могли с ним познакомиться. Прекрасным пособием для этого может служить книга Л. А. Калужнина и В. И. Сущанского «Преобразования и перестановки» (М., «Наука», 1979).

Цель книги — ознакомить учащихся с началами теории групп, нашедшей широкое применение в математике и естественных науках, например в ядерной физике, теории относительности и кристаллографии.

Теоретико-групповые понятия и результаты излагаются в книге в рамках теории групп перестановок конечных множеств. Это позволяет авторам показать разнообразные и интересные применения теории групп и в достаточной мере оправдать введение понятия группы.

Вы, наверное, согласитесь, что, скажем, квадрат красивее трапеции, но вряд ли сумеете объяснить, почему вы так считаете. Оказывается, теория групп позволяет указать некоторую естественную «меру красоты» различных геометрических фигур, и именно этой мерой вы, вероятно, подсознательно руководствуетесь, сравнивая фигуры.

Чрезвычайно эффектным является анализ с помощью теории групп популярной одно время игры «в пятнадцать».

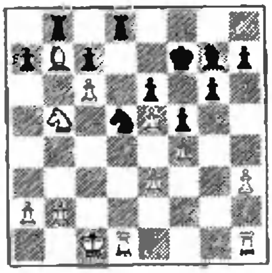
Книга написана с большим педагогическим мастерством, различные понятия, утверждения, конструкции иллюстрируются большим числом рисунков, так что читать ее легко и интересно.

Г. Фалин

Консультирует чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Гик.

Ботвинник проигрывает и... выигрывает

Пятидесятые годы прошли под знаком соперничества между Михаилом Ботвинником и Василием Смысловым. Если в матче 1954 года претендент ограничился почетной ничьей, то в 1957 году ему уже удалось взойти на вершину (счет 12,5:9,5). Вот эпизод из шестой партии матча.

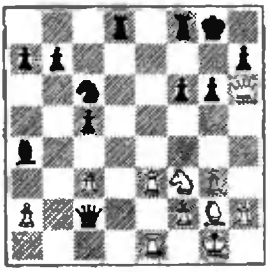


Смыслов — Ботвинник

23. Л:d5! Эффектное продолжение, которое сразу решает исход борьбы. **23...cd 24. К:c7 Лdc8 25. С:c8 Л:c8 26. К:d5 Л:c6+ 27. Крd2 Крe6 28. Кc3. Черные сдались.**

Ботвинник превосходно подготовился к матч-реваншу и через год уверенно вернул себе корону (12,5:10,5). Он начал матч с трех «рядовых» побед, а после 15-й партии счет мог уже стать 10:5. Положение черных, которыми играл Ботвинник, было значительно лучшим, причем почти любой ход сохранял перевес. Гроссмейстер погрузился в раздумье с тем, чтобы наметить наиболее четкий план выигрыша. Каково же было удивление Ботвинника, когда вдруг к столику подошел арбитр и сообщил, что черные просрочили время и им засчитывается поражение. Единственный случай такого рода за всю историю матчей на первенство мира!

Интересная позиция возникла в 18-й партии матча.

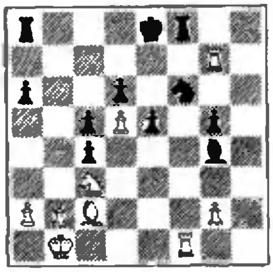


Ботвинник — Смыслов

Матовое кольцо вокруг черного короля вот-вот сомкнется. Однако белые довели свой перевес до победы только спустя... 50 ходов, причем «по дороге» могли сами получить мат! Тем не менее первое впечатление от позиции не является ошибочным— в распоряжении белых была эффектная комбинация, которая, увы, осталась за кулисами: 23. Кd4!! cd (не меняет дела 23...К:d4 24. Сd5+! Л:d5 25. Лe7 Лf7 26. Лe8+) 24. Сd5+! Л:d5 (24... Крh8 25. Лe7) 25. Лe8!, и мат неизбежен.

Волшебник шахмат Михаил Таль на рубеже 50-х и 60-х годов своими удивительными комбинациями приводил в трепет самых стойких гроссмейстеров. Путь от мастера до чемпиона мира он прошел всего за три года! Выиграв матч у Ботвинника со счетом 12,5:8,5, 23-летний рижанин стал восьмым и самым молодым в истории шахматным королем. В комбинационных бурях он явно превосходил своего могучего соперника. Эпизод из 17-й партии матча, выигранной кинжальным тактическим ударом Таля, вы можете найти на «шахматной страничке» в «Кванте», 1980, № 2.

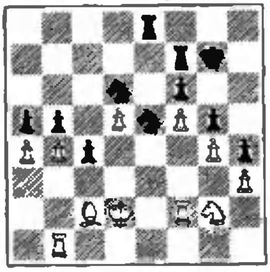
Через год в матч-реванше Ботвинник вновь блеснул умением находить «ахиллесову пяту» в игре своих соперников. Глубоко проанализировав причины неудачи в поединке с молодым рижанином, он с удивительной легкостью вернул себе титул сильнейшего шахматиста мира (счет 13:8). Вот финальная сцена заключительного, 21-го поединка.



Ботвинник — Таль

28. Кe4! Кd7 (28... К:e4 29. Сa4+!) **29. К:d6+ Крd8 30. Л:f8+ К:f8 31. К:c4 Сd7 32. Лf7 Крc7 33. d6+. Черные сдались.**

В середине 60-х годов Тигран Петросян поражал всех мастерством в защите. Он был почти непробиваемым шахматистом, и журналисты присвоили ему титул «железного тигра». В 1963 году, выиграв матч у своего выдающегося соперника со счетом 12,5:9,5, Петросян стал девятым чемпионом мира. Следующее положение возникло в 18-й партии матча.



Ботвинник — Петросян

Черные изящно реализуют свой позиционный перевес: 51...c3+! **52. Кр:c3 Лc7+ 53. Крd2 Кec4+ 54. Крd1 Кa3! 55. Лb2 Кdc4 56. Лa2 ab 57. ab К:b5 58. Лa6 Кc3+ 59. Крc1 К:d5 60. Сa4 Лec8 61. Кe1 Кf4. Белые сдались.**

Это был 25-й матч на первенство мира. Он стал последним в биографии патриарха советских шахмат М. Ботвинника. Право на матч-реванш было отменено, начинать «с нуля» Ботвинник не захотел. Кроме того, экс-чемпион мира, владевший шахматной короной 15 лет с двумя годичными перерывами, практической игре в скором времени предпочел работу по созданию искусственного шахматиста! Его целиком увлекла разработка алгоритма игры в шахматы для ЭВМ.

Окружность девяти точек и прямая Эйлера

1. Девять точек, определяющие окружность, для всех треугольников одни и те же.

2. Воспользуйтесь свойством (6).

3. Воспользуйтесь свойством (7).

4. Докажите, что если M — точка на описанной окружности и H — ортоцентр треугольника, то прямая Симсона, соответствующая точке M, делит $[HM]$ пополам — так же, как и окружность девяти точек. Далее докажите, что угол между прямыми Симсона, соответствующими точкам M_1 и M_2, измеряется половиной дуги M_1M_2.

5. а) Если O_1, O_2, O_3 — центры окружностей, описанных около треугольников AMB, BMC и CMA, то O_1O_2CA, O_2O_3AB, O_3O_1BC — параллелограммы, а ортоцентрами треугольников AMB, BMC и CMA являются, соответственно, C, A и B. Значит, прямые Эйлера O_1C, O_2A и O_3B пересекаются в точке, являющейся серединой отрезков O_1C, O_2A, O_3B.

б) Пусть O_1, O_2, O_3 — центры окружностей, описанных около треугольников AMB, BMC и CMA, O_1', O_2', O_3' — точки, им симметричные относительно, соответственно, прямых AB, BC, CA. Докажите, что треугольник $O_1'O_2'O_3'$ — правильный, точки M, O_1', O_2', O_3' лежат на одной окружности, прямые Эйлера треугольников AMB, BMC и CMA проходят через O_1, O_2, O_3 и середины отрезков MO_1', MO_2', MO_3' соответственно и перпендикулярны этим отрезкам. Следовательно, прямые Эйлера пересекаются в центре окружности, описанной около треугольника $O_1'O_2'O_3'$.

6. Пусть $|BC|=a$, $|CA|=b$, $|AB|=c$. Множество точек M, для которых

$$|MA|^2(b^2-c^2)+|MB|^2(c^2-a^3)+$$
$$+|MC|^2(a^2-b^2)=0,$$

есть прямая, поскольку центр описанной окружности и точка пересечения медиан удовлетворяют этому уравнению (для точки пересечения медиан воспользуйтесь формулой, выражающей их длины через стороны треугольника), эта прямая есть прямая Эйлера. Легко проверить, что точка L также удовлетворяет этому уравнению.

Математические соревнования в ФМШ при ЛГУ

(см. «Квант» № 7)

Школьные олимпиады

1. См. рисунок 1.

2. Положив $a=\sqrt[3]{5}$, $b=\sqrt[3]{2}$, перепишем тождество в виде $3\sqrt{a-b^2}=b+ab^2-a^2$ и докажем его возведением обеих частей в квадрат ($a^3=5$, $b^3=2$).

3. Если $[AB_1]$, $[AB_2]$, ..., $[AB_9]$ — данные отрезки, то утверждение задачи следует из того, что ни при каком выборе знаков сумма векторов $\pm\overrightarrow{AB_1}\pm\overrightarrow{AB_2}\pm\ldots\pm\overrightarrow{AB_9}$ не равна 0, так как проекция этой суммы на ось, перпендикулярную прямой l, — это сумма девяти равных по модулю (и не равных 0) чисел.

4. См. рисунок 2.

5. Пусть в произвольный момент времени одна из стрелок образует с направлением на 12 часов угол α, а другая — угол β (α и β измерены в градусах). Если первая стрелка — часовая, вторая — минутная, то $\frac{12\alpha-\beta}{360}\in\mathbf{Z}$; если, наоборот, первая стрелка — минутная, а вторая — часовая, то $\frac{12\beta-\alpha}{360}\in\mathbf{Z}$. Время невозможно определить правильно, если выполнены оба условия, причем стрелки не совпадают. Это имеет место в том и только в том случае, когда $\frac{143\alpha}{360}\in\mathbf{Z}$, но $\frac{11\alpha}{360}\notin\mathbf{Z}$. Так как $0\leqslant\alpha<360$, условие $\frac{143\alpha}{360}\in\mathbf{Z}$ выполняется при $\alpha=\frac{360}{143}n$, где $n=0, 1, 2, \ldots, 142$, а условие $\frac{11\alpha}{360}\in\mathbf{Z}$ выполняется при $n=0, 13, 26, \ldots, 130$. Таким образом, в течение полусуток встретится $143-11=132$ момента, когда время по данным часам невозможно определить, а в течение суток таких моментов 264.

6. Так как данное число делится на 9, остается обеспечить делимость на 25. Легко понять, что искомое число должно оканчиваться на 75.

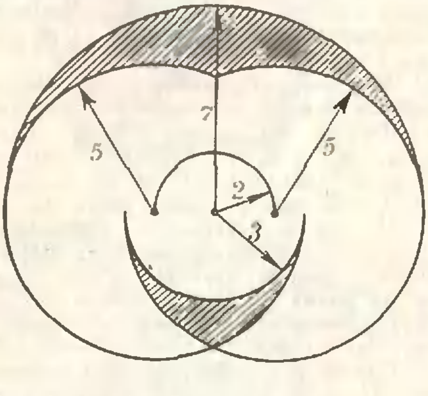


Рис. 1.

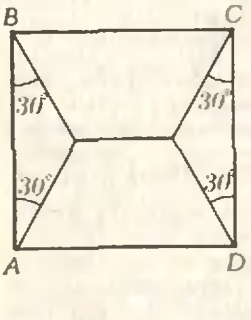


Рис. 2.

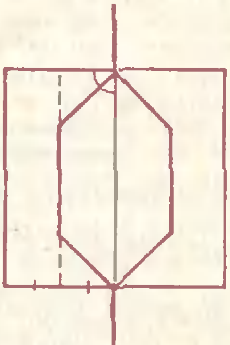


Рис. 3.

а перед семеркой должно стоять максимально возможное число девяток. Ответ. 26 цифр.

7. См. рисунок 3.

8. Перевернем те и другие часы одновременно. Через 7 минут переворачиваем первые часы, через 11 минут — вторые часы, через 14 минут и те, и другие. Песок на больших часах пересыпается через 3 минуты после последнего переворачивания, то есть через 17 минут после начального момента.

9. График одной из таких функций изображен на рисунке 4.

10. Приведем пример такой функции. Зададим последовательность (a_n) равенствами: $a_1=0$, $a_2=1$, $a_n=a_{n-2}^2+2$ (при $n \geqslant 3$). Очевидно, промежуток $[0; +\infty[$ разбивается на непересекающиеся промежутки $[a_1; a_2[$, $[a_2; a_3[$, $[a_3; a_4[$ и т. д., причем функция $x \to x^2+2$ переводит первый из этих промежутков в третий, второй — в четвертый, третий — в пятый и т. д. Функцию f построим по индукции так, чтобы она отображала первый промежуток на второй, второй — на третий, третий — на четвертый и т. д. Для этого положим $f(x)=x+1$, если $x \in [a_1; a_2[$. Предположим, что f уже определена при всех $x<a_n$. Пусть $x \in [a_n; a_{n+1}[$. Найдем такое $t \in [a_{n-1}; a_n[$, что $f(t)=x$ (это можно сделать так как f уже определена на отрезке $[a_{n-1}; a_n[$ и отображает его на отрезок $[a_n; a_{n+1}[$) и положим $f(x)=t^2+2$. Для $x<0$ положим $f(x)=f(-x)$.

11. Допустим, что расстояние x не встречается между двумя красными точками, а расстояние y не встречается между двумя синими точками. Пусть a — конец одного из отрезков. Тогда $a+x$ — синяя точка, $(a+x)+y$ — красная точка и $a+y$ — красная точка. Мы получили две красные точки $a+y$ и $a+x+y$ на расстоянии x.

12. Возьмем натуральное m, большее числа цифр в каждом из чисел a и b. Положим $n=10^m-1$. Тогда $na=10^m a-a$. Если a_1, a_2, ..., a_{s-1}, a_s — последовательные цифры числа a, причем $a_s \neq 0$, то a_1, a_2, ..., a_{s-1}, a_s-1 — первые s цифр числа na, $9-a_1$, $9-a_2$, ..., $9-a_{s-1}$, $10-a_s$ — s последних цифр этого числа, а остальные $m-s$ цифр этого числа — девятки. Поэтому сумма цифр числа na равна $9m$ и тем самым не зависит от a. Следовательно, такую же сумму цифр имеет число nb.

13. Поместите в точку A массу 1, в точки D и B — массы 2, в точку C — массу 4. Центр тяжести этой системы — точка R. Поместив в A и C массы 2, в D — массу 1, а в B — массу 4, получим центр тяжести — точку S. Отсюда выведите, что $|FS|=|SR|=|RK|$. Аналогично, $|MQ|=|QR|=|RH|$. Поэтому $(QS) \parallel (MF)$ и, значит, $(QS) \parallel (BD)$. Аналогично доказывается, что $(PR) \parallel (AC)$.

14. Для любых положительных чисел x и y легко доказывается неравенство $\left(\frac{x}{y}\right)^{x-y} \geqslant 1$, откуда $x^y \cdot y^x \leqslant x^x \cdot y^y$. Применив последнее неравенство к каждой паре чисел a_i, a_j, где $i<j$, и перемножив получившиеся неравенства, придем к утверждению задачи.

15. Для решения воспользуемся тождеством

$$n^4+4=((n-1)^2+1)\cdot((n+1)^2+1)$$

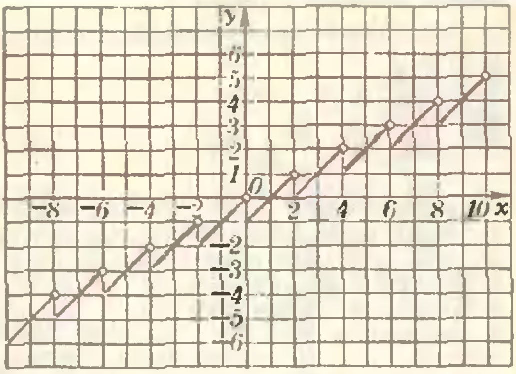


Рис. 4.

Получаем

$$\frac{\left(1^4+\frac{1}{4}\right)\left(3^4+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(11^4+\frac{1}{4}\right)}{\left(2^4+\frac{1}{4}\right)\left(4^4+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(12^4+\frac{1}{4}\right)}=$$

$$=\frac{(2^4+4)(6^4+4)\cdot\ldots\cdot(22^4+4)}{(4^4+4)(8^4+4)\cdot\ldots\cdot(24^4+4)}=$$

$$=\frac{(1^2+1)(3^2+1)(5^2+1)(7^2+1)\cdot\ldots}{(3^2+1)(5^2+1)(7^2+1)(9^2+1)\cdot\ldots}$$

$$\frac{\ldots\cdot(21^2+1)(23^2+1)}{\ldots\cdot(23^2+1)(25^2+1)}=$$

$$=\frac{2}{626}=\frac{1}{313}.$$

16. Так как биссектрисы углов B, E и K являются серединными перпендикулярами отрезков AC, CH, HA, они пересекаются в одной точке. Обозначим ее через O. Ясно, что $|OA|=|OC|=|OH|$. Положим $\widehat{OAB}=\widehat{OCB}=\alpha$, $\widehat{OCE}=\widehat{OHE}=\beta$, $\widehat{OHK}=\widehat{OAK}=\gamma$. По условию $\alpha+\beta=\alpha+\gamma=\beta+\gamma$. Следовательно, $\alpha=\beta=\gamma$. Значит, $[OA]$, $[OB]$, $[OC]$, $[OE]$, $[OH]$, $[OK]$, — биссектрисы соответствующих углов. Поэтому O — центр вписанной окружности.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 5)

1. 34316 + 75 281 + 9 = 109 606.

2. Искомая «десятка» может, например, начинаться с числа а) 114 (см. таблицу простых чисел в учебнике «Математика 5») или 11! + 2 (11! = 1 · 2 · 3 · 4 · ... · 11); б) 113; в) 18; г) 6; д) 1 или 3.

Нетрудно доказать, что максимальное количество простых чисел среди десяти последовательных натуральных чисел равно пяти, причем такая «десятка» единственна: начинается она числом 2.

3. По условию, $\widehat{DBB_1}$ в два раза больше $\widehat{DAA_1}$ (рис. 5). Отсюда следует (докажите!), что точка M лежит на дуге DA окружности $(B, |AB|)$.

4. Требуемая расстановка получится, если сначала занумеровать кружки по порядку (рис. 6), а затем поменять местами числа, расположенные в серединах противоположных сторон большого шестиугольника (рис. 7).

5. См. рисунок 8.

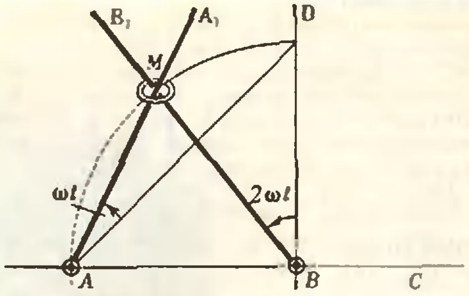


Рис. 5.

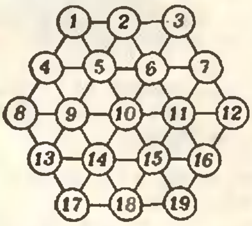


Рис. 6.

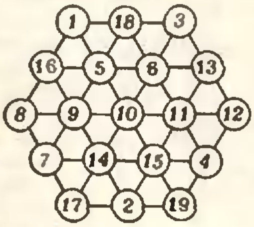


Рис. 7

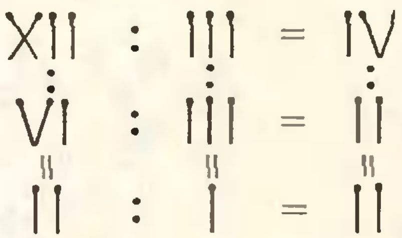


Рис. 8.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 6)

1. 7 составов. Проще всего в этом убедиться, если нарисовать диаграммы движения составов, взяв систему координат «время — расстояние». Интересно, что разница во времени между Москвой и Фрунзе не важна.

2. См. рисунок 9.

Рис. 9.

3. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_{21}$ — числа, написанные на первом диске. Повернем второй диск 21 раз на углы $2\pi/21$, $4\pi/21$, ..., $40\pi/21$, 2π. Так как сумма видимых через окошечки пяти чисел при каждом повороте равна нулю, сумма всех таких сумм (всего их 21 — по одной от каждого поворота) также равна нулю. Но в этой «сумме сумм» каждое из чисел, написанных на первом диске, встречается ровно 5 раз, и поэтому $5(a_1+a_2+\ldots+a_{21})=0$, откуда $a_1+a_2+\ldots+a_{21}=0$.

4. 1) $625=25^2$; 2) $7^4=2401$; 3) $39^2=1521$; 4) $128=2^7$; 5) $2^{12}=4096$; 6) $96\times7=672$.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 7)

1. **«Переставляшки».** *Хаос, шелк, лось, фанза* (есть слово *фáнза* — китайский дом с двускатной крышей, преимущественно в сельских местностях, и есть слово *фанзá* — род шелковой ткани), *навес, атлас, склеп, крест, ментор* (а вовсе не *монтёр*), *щетина, логика, кондор* (птица), *корвет* (трехмачтовый корабль), *корсет* (широкий, упругий пояс для стягивания талии), *лепесток, риска, тесак, ласка, тапир, ропот, порка, колос, оклад, садок*.

Марш — шрам — шарм (обаяние).

Спрут — спурт (бурный финиш) — *струп* (сухая корочка на заживающей ране).

Рост — сорт — торс (туловище) — *трос*.

Колун — клоун — уклон — кулон.

Автор — втора (второй голос в музыкальной партии) — *отвар — рвота — товар — тавро*.

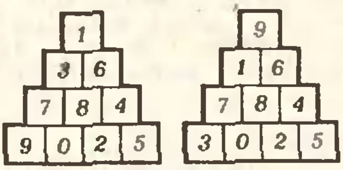


Рис. 10.

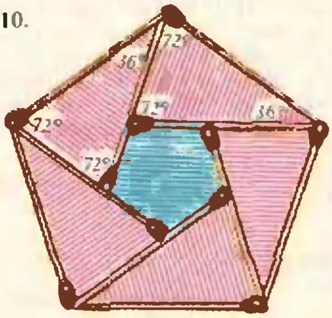


Рис. 11.

2. Два решения — см. рисунок 10.

3. См. рисунок 11: пятиугольники — правильные, треугольники — равнобедренные.

4. При правильной игре выигрывает начинающий: первым ходом он проводит бóльшую диагональ 1980-угольника, а затем соединяет точки, симметричные относительно проведенной диагонали тем, которые соединяет второй игрок.

Шахматный конкурс

(см. «Квант» № 8)

1. Ласкер — Бауэр (Амстердам, 1889 г.). Одна из самых знаменитых шахматных комбинаций — белые одного за другим жертвуют двух слонов: **1. С:h7+! Кр:h7 2. Ф:h5+ Крg8 3. С:g7! Кр:g7 4. Фg4+ Крh7 5. Лf3 e5 6. Лh3+ Фh6 7. Л:h6+ Кр:h6 8. Фd7! Черные сдались.**

2. Ласкер — Стейниц (Петербург, 1895—1896 гг.). **1. Ф:f4! ef 2. Кf6! Кe6 3. К:d7 К:g5 4. Лe7 Крg8 5. Кf6+ Крf8 6. Л:c7. Черные сдались.**

3. Ласкер — Пирц (Москва, 1935 г.). **1. Л:f6! gf 2. Фh5+ Kpd8** (2... Kpe7 3. Kf5+! ef 4. Kd5+ Kpd8. 5. Cb6+; 2...Kpd7 3. Фf7+ Ce7 4. Kf5! Ле8 5. Лd1) **3. Фf7 Cd7** (3...Ce7 4. Kf5 Фc7 5. Ka4! Лf8 6. Ф:h7 Kpe8 7. Cb6 Фd7 8. Фh5+ Лf7 9. Kg7+ Kpf8 10. Фh8×) **4. Ф:f6+ Kpc7 5. Ф:h8 Ch6 6. K:e6+! Ф:e6 7. Ф:a8 C:e3+ 8. Kph1. Черные сдались.**

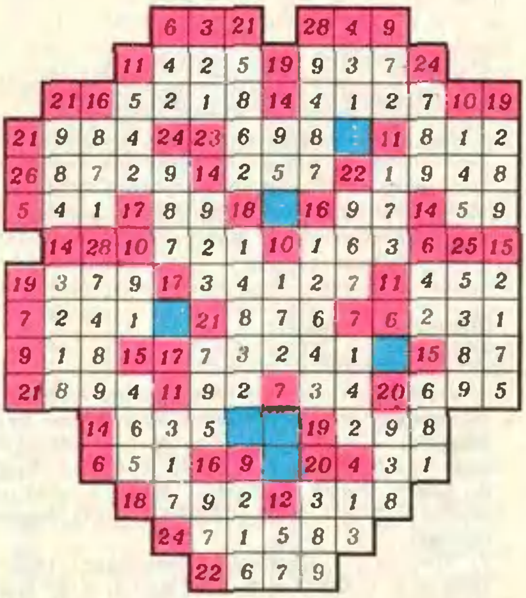
(см. «Квант» № 4)

1. Капабланка — Моррис (Нью-Йорк, 1911 г.). **1. Ле7! Ф:е7 2. К:f5.** Черные сдались — на отступление ферзя следует 3. Л:h7+ Kp:h7 4. Фh5×.
2. Капабланка — Топоров (Нью-Йорк, 1918 г.). **1. Kh6+ Kph8 2. Ф:e5!! Ф:e5 3. K:f7+! Черные сдались** (3...Л:f7 4. Лd8+ ведет к мату, а после 3...Kpg8 4. K:e5 черные остаются без фигуры).
3. Капабланка — Зубарев (Москва, 1925 г.). **1. Лe1+ Ce5** (1...Kpd8 2. Фa8+; 1...Kpd6 2. Фb6+) **2. d6+! Kpe6 3. Фb3+ Kpf5 4. Фd3+ Kpg5 5. Фe3+ Kpf5** (5...Kph5 6. g4+Kph4 7. Фh6×) **6. Фe4+Kpe6 7. Фc4+ Kp:d6** (7...Kpf5 8. Фg4×) **8. Лd1+Kpe7 9. Л:d7+ Kp:d7 10. Ф:a6. Черные сдались.**

(см. «Квант» № 5)

1. Алехин — Ейтс (Лондон, 1922 г.). **1. Kf6! Лgf8 2. Л:g7! Л:f6 3. Kpe5!** Черные сдались — они либо теряют ладью, либо получают мат в два хода: 3...Лaf8 4. Лh7+ Kpg8 5. Лcg7×.
2. Алехин — Фримэн (сеанс одновременной игры, Нью-Йорк, 1924 г.). **1. Ле8+ Kf8 2. Kh6+! Ф:h6 3. Л:f8+! Kp:f8 4. Фd8×.**
3. Алехин — Колле (Париж, 1925 г.). **1. Ф:d7! Л:d7 2. Ле8+ Kph7 3. Лcc8. Черные сдались** (грозит Лh8×).

Кроссчамбер.
(см. «Квант» № 7, с. 18)



				6	3	21		28	4	9			
			11	4	2	5	19	9	3	7	24		
	21	16	5	2	1	8	14	4	1	2	7	10	19
21	9	8	4	24	23	6	9	8	🟦	11	8	1	2
26	8	7	2	9	14	2	5	7	22	1	9	4	8
5	4	1	17	8	9	18	🟦	16	9	7	14	5	9
	14	28	10	7	2	1	10	1	6	3	6	25	15
19	3	7	9	17	3	4	1	2	7	11	4	5	2
7	2	4	1	🟦	21	8	7	6	7	6	2	3	1
9	1	8	15	17	7	3	2	4	1	🟦	15	8	7
21	8	9	4	11	9	2	7	3	4	20	6	9	5
		14	6	3	5	🟦	🟦	19	2	9	8		
		6	5	1	16	9	🟦	20	4	3	1		
			18	7	9	2	12	3	1	8			
				24	7	1	5	8	3				
					22	6	7	9					

В чем дело?
(см. «Квант» № 6, с. 10)
а) $y_1 - y_2 = 1$ при всех $x \neq \pm 1$.
б) В формулировку «основного свойства первообразной» входит промежуток, на котором та или иная функция является первообразной для данной функции. Функции y_1 и y_2 являются первообразными для функции $y = \frac{1}{x}$ на промежутке $]0; +\infty[$ — на этом промежутке они отличаются на константу (3). Эти же функции являются первообразными для функции $y = \frac{1}{x}$ на промежутке $]-\infty; 0[$ — на этом промежутке они тоже отличаются на константу (5). На любом промежутке, включающем 0, эти функции не являются первообразными ни для какой функции, так как при $x = 0$ они не определены — поэтому на любом таком промежутке «основное свойство первообразной» к ним не применимо.

Номер подготовили:
А. Виленкин, А. Егоров, Н. Клумова, Т. Петрова,
А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шиханович

Номер оформили:
Г. Красиков, Э. Назаров, М. Сидоров,
Н. Смирнова, Л. Чернисевская

Зав. редакцией Л. Чернова

Художественный редактор Т. Макарова

Корректор А. Ипатова

113035, Москва, Б. Ордынка 21/16.
«Квант», тел. 231-83-62
Сдано в набор 20.6.81
Подписано в печать 29.7.81
Печать офсетная
Бумага 70×108 1/16. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,60 Уч.-изд. л. 7,13 Т-23451
Цена 30 коп. Заказ 1464
Тираж 232 467 экз.

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
г. Чехов Московской области

ШАХМАТНЫЙ КОНКУРС

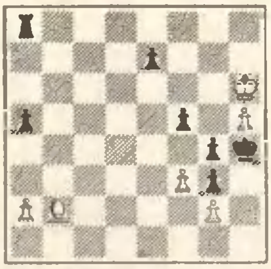
ШЕСТЬ КОМБИНАЦИЙ

В «Кванте», 1981, № 5 были предложены комбинации первого русского чемпиона мира по шахматам А. Алехина. Новые конкурсные задания представляют собой комбинации, заимствованные у следующих чемпионов.

1. Ботвинник — Капабланка. Белые выигрывают.

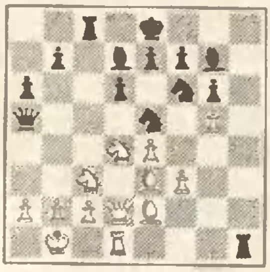
Эта известная позиция возникла в партии, игранной в 1938 году на международном турнире в Голландии. Здесь белые провели красивую комбинацию, которую Ботвинник позже использовал как пробный камень при разработке своего алгоритма шахматной игры на ЭВМ. Кое-какие варианты алгоритм выдал, но, кажется, экс-чемпион мира убедился, что пока он играет в шахматы лучше, чем его электронный ученик. Любопытно, что в 1954 году на Всемирной шахматной Олимпиаде в Амстердаме Ботвинник к своему большому удивлению в витрине одной из кондитерских обнаружил торт, на котором красовалась позиция, изображенная на диаграмме! Так что голландские кондитеры тоже умеют создавать произведения в жанре изобразительных шахмат.

Два наших шахматных ветерана в этом году праздновали свои юбилеи: Михаил Ботвинник — 70-летие, Василий Смыслов — 60-летие. Ботвинник уже давно не играет в турнирах, Смыслов же до сих пор сохраняет хорошую шахматную форму — совсем недавно он успешно сыграл в Московском международном турнире, разделив 2—4-е места. Следующая комбинация никогда не была осуществлена в реальной партии. Этот оригинальный этюд Смыслов придумал в 17-летнем возрасте.



2. В. Смыслов, 1938 г. Ничья.

Красивые комбинации встречаются не только в этюдах или турнирных поединках.



3. Таль — N. N. Белые выигрывают.

Неизвестный противник Михаила Таля, один из участников сеанса одновременной игры гроссмейстера, только что взял своей ладьей белую ладью на h1. Любой бы на месте Таля не задумываясь сыграл Л:h1. Однако на то Таль и волшебник шахмат, чтобы придумывать за доской фантастические решения!

Найдя эффектный выигрыш белых в следующей позиции (1956 г.), вы убедитесь, что комбинация Петросяна в матче со Спасским, 1966 года была подготовлена им... десятью годами раньше.

4. Петросян — Симагин. Выигрыш.

Следующий пример показывает, что чемпионы мира умеют выигрывать не только белыми фигурами.

5.Хуг — Спасский. Черные начинают и выигрывают.

И в заключение одна комбинация Роберта Фишера.

6. Фишер — Куппер. Белые выигрывают.

Срок отправки решений — 30 сентября 1981 г. (с пометкой на конверте «Шахматный конкурс № 8—81»).

Цена 30 коп.
Индекс 70465

Эти загадочные пейзажи и мозаики — фотографии реальных объектов, именуемых жидкими кристаллами. Фотографии сделаны под микроскопом при различных условиях освещения. Структура жидких кристаллов и их свойства весьма неожиданны и разнообразны. Рассказ о них помещен в этом номере журнала.